Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015
Übungsblatt 1, 27.04.2015

1. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur und B eine nicht-leere Teilmenge von A, die die Interpretationen $c^{\mathfrak{A}}$ aller Konstanten enthält und unter allen Operationen $f^{\mathfrak{A}}$ abgeschlossen ist. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus L auf B einschränkt, erhält man eine L-Struktur $\mathfrak{B}$ eine *Unterstruktur* von $\mathfrak{A}$.

   (a) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von $\mathfrak{A}$ entweder leer ist oder wieder eine Unterstruktur. Daraus folgt, dass jede nicht-leere Teilmenge S von A in einer kleinsten Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ enthalten ist, der *von S erzeugten* Unterstruktur.

   (b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

2. Eine Teilformel von φ ist ein zusammenhängendes Teilstück von φ, das selbst eine Formel ist. Zeigen Sie, daß alle Teilformeln von φ im rekursiven Aufbau von φ vorkommen müssen. Das heißt:

   (a) Eine Primformel hat keine echten Teilformeln, wenn es keine Funktionszeichen hat.

   (b) Eine echte Teilformel von $\neg\psi$ ist eine Teilformel von ψ.

   (c) Eine echte Teilformel von $\psi_1 \wedge \psi_2$ ist eine Teilformel von ψ_1 oder von ψ_2.

   (d) Eine echte Teilformel von $\exists x\psi$ ist eine Teilformel von ψ.

3. Sei $L = \{0, 1, \oplus, \otimes, P, \lhd\}$, wobei 0, 1 Konstantenzeichen sind, $\oplus, \otimes$ zweistellige Funktionszeichen sind, P ein einstelliges Relationszeichen ist, und $\lhd$ ein zweistelliges Relationszeichen ist. Wir betrachten die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als L-Struktur $\mathfrak{N}$, indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren: $0^{\mathfrak{N}} = 0$, $1^{\mathfrak{N}} = 1$, $\oplus^{\mathfrak{N}} = +$, $\otimes^{\mathfrak{N}} = \cdot$, $\lhd^{\mathfrak{N}} =<$ and $P^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} : p \text{ ist Primzahl}\}$. Drücken Sie die folgende Aussagen als L-Formeln auf:

   (a) Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.

   (b) Es gibt eine von 3 verschiedene Primzahl.

   (c) Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.

4. Finden Sie $\lhd$ so dass $(\mathbb{N}, <, =)$ und $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \lhd, =)$ isomorphe L-Strukturen sind.

Abgabe am 04.05.2015 vor 16 Uhr.