Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015
Übungsblatt 11, 13.07.2015

Eine Funktion $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ heißt *partielle rekursiv*, wenn sie sich aus den Grundfunktionen durch Anwenden der Regeln $\mathbf{R1}, \mathbf{R2}, \mathbf{R3}$ und der folgende Regel aufbauen läßt:

R4 Sei g partielle rekursiv, dann auch

$$f(\bar{x}) = \mu y(\forall z \leq y(g(\bar{x}, z) \downarrow \wedge g(\bar{x}, y) = 0)$$

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß eine Funktion f ist genau dann partielle rekursiv, wenn $\mathrm{Graph}(f)$ r.a. ist.

Aufgabe 2. (Unlösbarkeit des Halteproblems). Zeigen Sie, daß man nicht entscheiden kann, ob eine vorgelegte Turingmaschine mit leerer Eingabe stoppt.

(*Himweis:* Sei A eine rekursiv aufzählbare, aber nicht rekursive Menge. Sei $\mathscr{M}$ eine Turingmaschine, die die partielle Funktion $A \times \{0\}$ berechnet. Betrachten Sie für jedes n die Turingmaschine $\mathscr{M}_n$, die bei leerer Eingabe so läuft wie $\mathscr{M}$ mit Eingabe n.)

Aufgabe 3. Beweisen Sie den *Uniformisierungssatz*: Jede rekursiv aufzählbare Relation $R \subseteq \mathbb{N}^{n+1}$ läßt sich *uniformisieren.* Dies bedeutet: Es gibt eine partielle rekursive Funktion f_R mit Definitionsbereich $\{\bar{x} \in \mathbb{N}^n : \exists y R(\bar{x}, y)\}$, deren Graph in R liegt (d.h. $f_R(\bar{x}) = y \Leftrightarrow R(\bar{x}, y)$).

(*Hinweis*: Sei R gegeben durch $\exists z S(\bar{x}, y, z)$ mit rekursiven S. Wählen Sie für jedes $\bar{x}$ im Definitionsbereich ein minimales $\langle y, z \rangle$ mit $S(\bar{x}, y, z)$ und setzen Sie $f_R(\bar{x}) = y$.)

<u>**Abgabe am 20.07.2015 vor 16 Uhr.**</u>