

## Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 2, 04.05.2015

1. Sei  $\mathfrak{A}$  eine Unterstruktur und  $s_0, \dots, s_n \in A$ . Zeigen Sie: die von  $\{s_0, \dots, s_n\}$  erzeugte Unterstruktur besteht gerade aus allen  $t^{\mathfrak{A}}[s_0, \dots, s_n]$  für  $L$ -terme  $t(x_0, \dots, x_n)$ .
2. Beweisen Sie: Isomorphe Strukturen sind elementar äquivalent.
3. (a) Ist  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  isomorph zu  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ?  
(b) Ist  $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$  elementar äquivalent zu  $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$ ?  
(c) Ist  $(\mathbb{Z}, +)$  isomorph zu  $(\mathbb{Q}, +)$ ?  
(d) Sind  $(\mathbb{N}, \leq)$  und  $(\mathbb{Z}, \leq)$  elementar äquivalent?
4. Sei  $L = \{f, g\}$  mit einem zweistelligen  $g$  und einem dreistelligen  $f$ . Sei

$$\alpha = \exists v_1 \exists v_2 f(v_0, v_1, v_2) \dot{=} v_0.$$

- (a) Ist in  $\alpha$  die Variable  $v_0$  durch  $g(v_0, v_2)$  ersetzbar, d.h., ist  $v_0$  frei für  $g(v_0, v_2)$  in  $\alpha$ ? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Geben Sie ein (möglichst einfaches)  $\alpha'$ , so dass  $\alpha$  und  $\alpha'$  äquivalent sind und  $v_0$  in  $\alpha'$  durch  $g(v_0, v_2)$  ersetzbar ist.

Abgabe am 11.05.2015 vor 16 Uhr.