Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 3, 11.05.2015

Definition 1. Eine *Boolesche Algebra* ist eine Menge B mit zwei ausgezeichneten Elementen 0 und 1 und Operationen $\sqcap, \sqcup : B^2 \mapsto B$ und ${}^c : B \mapsto B$, für die die folgenden Gleichungen gelten:

Idempotenz: $a \sqcap a = a$ und $a \sqcup a = a$

Kommutativität: $a \sqcap b = b \sqcap a$ und $a \sqcup b = b \sqcap a$

Assoziativität: $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ und $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$

Absorption: $a \sqcap (a \sqcup b) = a$ und $a \sqcup (a \sqcap b) = a$

Distributivität: $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$ und $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

Null und Eins: $0 \sqcap a = 0$ und $1 \sqcup a = 1$

Komplement: $a \sqcap a^c = 0$ und $a \sqcup a^c = 1$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass man in der Definition einer Boolesche Algebra auf eine der beiden Distributivitätsregeln verzichten kann.

Aufgabe 2. Beweisen Sie: in Booleschen Algebren gelten die *de Morganeschen Regeln*:

$$(a \sqcap b)^c = a^c \sqcup b^c; \qquad (a \sqcup b)^c = a^c \sqcap b^c; \qquad (a^c)^c = a.$$

Aufgabe 3. Wir nennen zwei aussagenlogische Formeln *äquivalent*, wenn sie bei allen Belegungen der Variablen den gleichen Wahrheitswert haben. Sei M eine nicht-leere Menge von Variablen und $\mathscr{L}(M)$ die Menge der Äquivalenzklassen von Aussagenlogischen Formeln in Variablen aus M. Zeigen Sie, dass $\mathscr{L}(M)$ eine Boolesche Algebra ist, wenn man für 0 die Äquivalenzklasse einer Formel nimmt, die bei allen Belegungen den Wahrheitswert $\perp$ hat, zum Beispiel $p \wedge \neg p$, für 1 die Äquivalenzklasse einer allgemeingültigen Formel, für $\sqcap$ und $\sqcup$ Konjunktion und Disjunktion und für ^{c} die Negation.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass jede aussagenlogische Formel äquivalent ist zu einer Formel in *disjunktiver Normalform*

$$\bigvee_{i=1}^{N} k_i,$$

wobei die k_i Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind.

Dual dazu ist jede Formel auch äquivalent zu einer *Konjunktiven Normalform*

$$\bigwedge_{i=1}^{N} d_i,$$

wobei die d_i Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen sind.

Abgabe am 18.05.2015 vor 16 Uhr.