Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015
Übungsblatt 4, 18.05.2015

Wir betrachten aussagenlogische Formeln aufgebaut aus $\neg$ und $\wedge$. Man kann später leicht $\vee$, $\Rightarrow$, $\top$, $\bot$ hinzufügen.

Definition 1. Sei f eine Formel und g eine Teilformel von f. Wir definieren rekursiv, wann g ein *Positivteil* oder ein *Negativteil* von f ist:

- f ist ein Positivteil von f.
- Wenn $\neg g$ Positivteil von f ist, dann ist g Negativteil von f.
- Wenn $\neg g$ Negativteil von f ist, dann ist g Positivteil von f.
- Wenn $(g_1 \wedge g_2)$ ein Negativteil von f ist, dann sind g_1 und g_2 Negativteile von f.

Wenn g eine Teilformel von f ist, schreiben wir $f = f[g]$. Mit $f[h]$ meinen wir dann die Formel, die entsteht, wenn wir in f die Formel g durch h ersetzen.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Positivteile und Negativteile der folgenden Formeln ($\vee$ wird als Abkürzung aufgefaßt):

- $\neg(\neg f \vee g) \vee ((\neg f \vee g) \vee f)$
- $\neg(\neg f \vee g) \Rightarrow (f \vee \neg g)$
- $(f \wedge g) \wedge \neg(f \vee h)$.

Aufgabe 2. Seien g Positivteil (Negativteil) von f und μ eine Belegung der Variablen. Dann gilt

$$\mu(g) = \mathrm{W}(\mu(g) = \mathrm{F}) \Rightarrow \mu(f) = \mathrm{W}$$

Aufgabe 3. Seien $(g_1 \wedge g_2)$ Positivteil von $f = f[g_1 \wedge g_2]$ und μ eine Belegung. Dann ist $\mu(f) = \mathrm{W}$ gdw $\mu(f[g_1]) = \mathrm{W}$ und $\mu(f[g_2]) = \mathrm{W}$.

Betrachten Sie den folgenden Kalkül:

> *Axiome*: Alle Formeln, in denen eine Variable X sowohl als Positivteil, als auch (an anderer Stelle) als Negativteil auftritt.
>
> *Regeln*: Sei $(g_1 \wedge g_2)$ Positivteil von $f[g_1 \wedge g_2]$. Dann haben wir die Schlußregel
>
> $$\frac{f[g_1], f[g_2]}{f[g_1 \wedge g_2]}$$

Aufgabe 4. f ist genau dann allgemeingültig, wenn f beweisbar ist.
(Hinweise: Induktion über die Länge von f. Teilen Sie den Beweis in zwei Fälle: 1.Fall: f hat einen Positivteil der Form $(g_1 \wedge g_2)$: 2.Fall; nicht 1.Fall. Im zweiten Fall: Weil f kein Axiom ist, finden wir eine Belegung μ der Variablen, für die gilt: Wenn X als Positivteil (Negativteil) in f vorkommt, ist $\mu(X) = \mathrm{F}(\mu(X) = \mathrm{W})$. Behauptung: Das gleiche gilt für alle Teilformeln g von f. D.h. Wenn g als Positivteil (Negativteil) in f vorkommt, ist $\mu(g) = \mathrm{F}(\mu(g) = \mathrm{W})$ (Induktion über den Aufbau von g).)
Abgabe am 01.06.2015 vor 16 Uhr.