Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 5, 01.05.2015

Aufgabe 1. Sei M eine Menge von Aussagenvariablen. Wir geben $\{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}$ die diskrete Topologie und versehen $\mathscr{B} = \{\mathrm{W}, \mathrm{F}\}^M$ mit der Produkttopologie. Zeigen Sie, dass für jede aussagenlogische Formel f die Menge $\{\mu \in \mathscr{B} : \mu(f) = \mathrm{W}\}$ abgeschlossen ist. Der Kompaktheitssatz der Aussagenlogik folgt nun aus der Kompaktheit von $\mathscr{B}$. (Nach dem Satz von Tychonoff ist das Produkt von Kompakten Räumen wieder kompakt.)

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Strukture. Eine Unterstruktur $\mathfrak{C}$ heißt *elementare* Unterstruktur, wenn

$$\mathfrak{A} \models \phi[c_1, \ldots, c_n] \iff \mathfrak{C} \models \phi[c_1, \ldots, c_n]$$

für alle $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ und $c_1, \ldots, c_n \in C$. Zeigen Sie:

(a) (Tarski-Kriterium) C ist genau dann Universum einer Unterstrukter von $\mathfrak{A}$, wenn für alle $\phi(x, y_1, \ldots, y_n)$ und alle $d_1, \ldots, d_n \in C$ das folgende gilt: Wenn es ein $a \in A$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[a, d_1, \ldots, d_n]$ gibt, dann gibt es auch ein $c \in C$ mit $\mathfrak{A} \models \phi[c, d_1, \ldots, d_n]$. (Hinweis: Die eine Richtung ist einfach; die andere folgt durch Induktion den Aufbau von ϕ.)

(b) Wenn L höchstens abzählbar ist, hat jedes $\mathfrak{A}$ eine höchstens abzählbar elementare Unterstruktur.

Aufgabe 3. Sei $\mathfrak{R}$ der angeordnete Körper der reellen Zahlen, eventuell mit Zusatzstruktur. Zeigen Sie, dass es eine zu $\mathfrak{R}$ elementar äquivalent Struktur $\mathfrak{R}^*$ Element gibt, die größer sind als jedes $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\text{-mal}} < c$ mit $n \in \mathbb{N}$.

(Hinweis: Sei $\mathrm{Th}(\mathfrak{R})$ die Menge aller Aussage, die in $\mathfrak{R}$ gelten, und c eine neue Konstante. Dann hat jede endliche Teilmenge von $\mathrm{Th}(\mathfrak{R}) \cup \{1 + \cdots + 1 < c : n \in \mathbb{N}\}$ ein Modell.)

Aufgabe 4. Zeichen Sie, dass endliche elementar äquivalent Strukturen isomorph sind.

(Hinweis: Das ist einfach für endliches L. Für unendliches L nehmen wir an, dass $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nicht isomorph sind. Dann gibt es für jede Bijektion $F : A \to B$ ein Zeichen Z_F aus L, das mit F nicht Kommutiert. Betrachte nun die endliche Teilsprache $L' = \{Z_f : f : A \to B \text{ Bijektion}\}$.)

Abgabe am 08.06.2015 vor 16 Uhr.