Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 7, 15.06.2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß das Paarmengenaxiom aus dem Ersetzungaxiom, dem Potenzmengenaxiom und der Existenz der leeren Menge folgt.

Seien $\mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ die Menge der endlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, $\mathfrak{P}_{\text{inf}}(\mathbb{N})$ die Menge der unendlichen Teilmengen von $\mathbb{N}$, und $\beta : \mathbb{N} \to \mathfrak{P}_{\text{fin}}(\mathbb{N})$ eine Bijektion. Seien $\mathscr{M} = \mathbb{N} \cup \mathfrak{P}_{\text{inf}}(\mathbb{N})$ und $V = \mathbb{N} \in \mathfrak{P}_{\text{inf}}(\mathbb{N})$. Definieren Sie, für alle $x, y \in \mathscr{M}$,

$$xE_\beta y \Leftrightarrow (x, y \in \mathbb{N} \wedge x \in \beta(y)) \vee (y \in \mathfrak{P}_{\text{inf}}(\mathbb{N}) \wedge x \in \mathbb{N} \wedge x \in y).$$

Betrachten Sie die Struktur $(\mathscr{M}, E_\beta, V)$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, daß die folgenden Axiome gelten: Extensionalität, Paarmenge, Aussonderung, Vereinigung, Potenzmenge, Ersetzung.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, daß für die Bijektion $\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) = \{n_1, \ldots, n_k\}$ (für paarweise verschiedene n_i) ist $(\mathscr{M}, E_\beta, V)$ *fundiert*: es gibt keine unendliche absteigendende Kette

$$n_0 E_\beta n_1 E_\beta n_2 \ldots.$$

Aufgabe 4. Geben Sie ein β an, für das $(\mathscr{M}, E_\beta, V)$ nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

Abgabe am 22.06.2015 vor 16 Uhr.