Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 8, 22.06.2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie in BG, daß $(\omega, +, \cdot)$ ein unitärer kommutativer Halbring ist. Das heißt, daß die folgenden Axiome gelten:

$$\forall x, y \; x + y \doteq y + x$$

$$\forall x \; x + \underline{0} \doteq x$$

$$\forall x, y, z \; (x + y) + z \doteq x + (y + z)$$

$$\forall x, y \; x \cdot y \doteq y \cdot x$$

$$\forall x \; x \cdot \underline{1} \doteq x$$

$$\forall x, y, z \; (x \cdot y) \cdot z \doteq x \cdot (y \cdot z)$$

$$\forall x, y, z \; x \cdot (y + z) \doteq (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Aufgabe 2. Sei $\mathscr{M}$ ein Modell von GB. Ein Element a von $\mathscr{M}$ heißt *nichtstandard natürliche Zahl*, wenn $\mathscr{M} \models a \in \omega$, aber $\mathscr{M} \models \neg a \doteq \underline{n}$ für alle $n = 0, 1, \ldots$. Zeigen Sie:

1. Wenn BG konsistent ist, gibt es ein Modell mit nichtstandard natürliche Zahlen.
2. Es gibt in $\mathscr{M}$ keine kleinste nichtstandard natürliche Zahl.

Aufgabe 3. Beweisen Sie den Satz von Schröder-Bernstein: Seien a, b Mengen, $f : a \to b$ und $g : b \to a$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h : b \to a$.
(*Hinweis*: Wir können annehmen, daß a eine Teilmenge von b und f die Inklusionsabbildung ist. Sei $C = \{g^n(x) : n \in \omega, x \in b \setminus a\}$. Setze $h(c) = g(c)$ für $c \in C$ und $h(y) = y$ für $y \in b \setminus c$.)

<u>**Abgabe am 29.06.2015 vor 16 Uhr.**</u>