Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Martin Ziegler
Übungen: Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2015

Übungsblatt 9, 29.06.2015

Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß die Menge der rellen Zahlen und die Potenzmenge von ω gleichmächtig sind.

(*Hinweis*: Für $x \subseteq \omega$, wir betrachten $f_x \in 2^\omega$ sodaß $f_x(n) = 1 \Leftrightarrow n \in x$. Sei $C := \{f \in 2^\omega : \exists k \forall n \geq k (f(n) = 1)\}$ und zeigen Sie, daß C abzhälbar ist. Beweisen Sie, daß $H : 2^\omega \setminus C \to [0,1)$ sodaß $H(f) := \sum_{n=1}^\infty f(n) \cdot 2^{-n}$ eine Bijektion ist.)

Aufgabe 2. (Ohne Auswahlaxiom) Zeigen Sie, daß das Zornsche Lemma für abzhälbar $(P, <)$ gilt.

(*Hinweis*: Seien $P = \{p_i : i \in \omega\}$ und q_n eine echte obere Schranke p_i von $q_0, \ldots, q_{n-1}$, mit minimalen i. Dann, man zeigt $\{q_n : n \in \omega\}$ ist eine kette ohne echte obere Schranke.)

Aufgabe 3. (Ohne Auswahlaxiom) Zeigen Sie, daß alle endlichen Mengen haben eine Auswahlfunktion.

Definition 1. Eine Menge x heißt *Dedekind-endliche*, wenn jede Injektion $h : x \to x$ eine Bijektion ist.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, daß

$$x \text{ ist endliche } \Leftrightarrow x \text{ ist Dedekind-endliche.}$$

Aufgabe 5. (Ohne Auswahlaxiom) (Russel-Whitehead)Zeigen Sie, daß

$$x \text{ ist endliche } \Leftrightarrow \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x)) \text{ ist Dedekind-endliche.}$$

(*Hinweis*: Betrachte die Funktion $f : \omega \to \mathfrak{P}(\mathfrak{P}(x))$ sodaß $f(n) := \{a \subseteq x : |a| = n\}$.)

<u>**Abgabe am 06.07.2015 vor 16 Uhr.**</u>