Prof. Dr. Wolfgang Soergel
Dr. Giorgio Laguzzi

Universität Freiburg
SS 2018

Übungen zur Elementargeometrie – Blatt 5

Aufgabe 1. Man zeige, dass die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ zu einer Kongruenzebene werden, wenn wir als Kongruenzen diejenigen Abbildungen auszeichen, die eine der beiden Gestalten $z \mapsto az + b$ oder $z \mapsto a\bar{z} + b$ haben mit $a, b \in \mathbb{C}$ una $|a| = 1$. Man bestimme das zugehörige durch die Bedingung $\langle 1, 1\rangle = 1$ normalisierte invariante Skalar-produkt.

Aufgabe 2. Gegeben ein reeller Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ verwendet man überlicherweise die Notation $||v|| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Man zeige in einem beliebigen Vektorraum mit Skalarprodukt die Äquivalenz

$$||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 \quad \Leftrightarrow \quad \langle v, w\rangle = 0.$$

Aufgabe 3. Man zeige: Gegeben eine Kongruenzebene (E, K) ist die Gruppe $\vec{K}^+$ ihrer Richtungskongruenzen mit positiver Determinante stets kommutativ. (*Hinweise*: Man zeige zunächst, dass für jede Richtungsspiegelung s das Davormultiplizieren von s eine Bijektion $\vec{K}^+ \to \vec{K}^-$ zwischen den Mengen von Richtungskongruenzen mit positiver und mit negativer Determinante indiziert. Man folgere $srs = r^{-1}$ für alle $s \in \vec{K}^-$ und $r \in \vec{K}^+$. Damit ist es dann nicht mehr schwierig.)

Aufgabe 4. Man zeige: Hat für zwei Isomorphismen von Kongruenzebenen $\varphi, \psi : E \xrightarrow{\sim} F$ die Verknüpfung $\vec{\varphi} \circ \vec{\psi}^{-1}$ positive Determinante, so induzieren sie dieselbe Abbildung $\mathrm{W}(\varphi) = \mathrm{W}(\psi) : \mathrm{W}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(F)$ auf den Winkelgruppen. Andernfalls gilt $\mathrm{W}(\varphi) = \mathrm{W}(\psi) \circ \mathrm{inv}$ für $\mathrm{inv} : \mathrm{W}(E) \xrightarrow{\sim} \mathrm{W}(E)$ das Invertieren.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, daß je zwei Kongruenzebenen isomorph sind.

Abgabefrist: 12.6.2018, *vor* 14 Uhr, im Logik-Flur (3. Stock) in der Ernst-Zermelo-Straße.