

Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

WS 2012-2013, Übungsblatt 11

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsgruppe:
Tutor:

Aufgabe 41: Eine Menge Γ von L -Aussagen heißt *vollständig*, falls für jede L -Aussage φ gilt, dass

$$\Gamma \models \varphi \text{ oder } \Gamma \models \neg\varphi.$$

Für eine L -Struktur \mathfrak{A} definieren wir $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) := \{\varphi : \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ vollständig ist.

Aufgabe 42: Sei \mathfrak{A} eine Struktur. Eine Teilmenge X der Grundmenge A von \mathfrak{A} ist *definierbar* gdw es eine Formel φ gibt, so dass $X = \{a \in A : \mathfrak{A} \models \varphi(a)\}$.

- Zeigen Sie, dass die Menge der positiven reellen Zahlen in der Struktur (\mathbb{R}, \cdot) definierbar ist.
- Finden Sie eine Aussage φ , so dass $(\mathbb{R}, \cdot) \models \varphi$ und $(\mathbb{R}, +) \models \neg\varphi$.
- Finden Sie ein $r \in \mathbb{R}$, so dass $\{r\}$ in den Strukturen (\mathbb{R}, \cdot) und $(\mathbb{R}, +)$ definierbar ist.

Aufgabe 43: Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln allgemeingültig sind:

- (a) $\forall x\varphi \rightarrow \varphi_x^t$, für x frei für t in φ ;
- (b) $\forall x\varphi \leftrightarrow \varphi$, wenn x nicht frei in φ vorkommt;
- (c) $\forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi$;
- (d) $\exists x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \exists x\varphi \wedge \exists x\psi$;
- (e) $\exists x\forall y\varphi(x, y) \rightarrow \forall y\exists x\varphi(x, y)$.

Aufgabe 44: Finden Sie:

- Ein Gegenbeispiel für (a), wenn x nicht frei für t in φ ist.
- Ein Gegenbeispiel für (b), wenn x frei in φ vorkommt.
- Eine Struktur und eine Formel, so dass die umgekehrte Implikation in (e) falsch ist.

Abgabe am Mittwoch, den 23.01.2013, vor der Vorlesung. Geben Sie Ihre Lösungen einschließlich dieses Aufgabenblatts ab. Schreiben Sie auf das Aufgabenblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen und Übungsgruppe.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
<http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ws12-13logikfuerinformatik.html>