Abteilung für Mathematische Logik 7.11.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Giorgio Laguzzi

Übungen zur Vorlesung
Logik für Informatiker
WS 2012-2013, Übungsblatt 3

Name: ....
Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....
Tutor: ....

Aufgabe 9: Sei $B = (X, 0, 1, \sqcup, \sqcap, ^c)$ eine boolesche Algebra. Sei die binäre Relation $\leq$ auf X definiert durch: Für $a, b \in X$

$$a \leq b \iff a \sqcup b = b,$$

(oder äquivalent, $a \leq b \iff a \sqcap b = a$).

Wir schreiben $a < b$ gdw $a \leq b$ und $a \neq b$. Ein $b \in B \setminus \{0\}$ heißt *Atom* gdw es kein $a \in B$ mit $0 < a < b$ gibt. Eine boolesche Algebra B heißt *atomar* gdw es für jedes $b \in B \setminus \{0\}$ ein Atom $a \leq b$ gibt.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede endliche boolesche Algebra ist atomar.

(b) Wenn eine endliche boolesche Algebra n Atome hat dann hat sie genau 2^n Elemente.

Aufgabe 10: Sei $(X, 0, 1, \sqcup, \sqcap, ^c)$ eine boolesche Algebra. Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in X$ gilt:

(a) $a \sqcup b = b$ gdw $a \sqcap b = a$,

(b) wenn $a \sqcap b = 0$ und $a \sqcup b = 1$, dann $b = a^c$,

(c) $(a \sqcup b)^c = (a^c \sqcap b^c)$,

(d) $(a^c)^c = a$.

Aufgabe 11: Seien A eine boolesche Algebra und $X \subseteq A$ einer Menge. Bezeichne $B(X)$ die boolesche Algebra, die durch boolesche Kombinationen der Elemente von X gebildet wird. Die Elemente dieser Menge X heißen die *Generatoren* von $B(X)$.

Beweisen Sie, dass jedes Element $b \in B(X)$ die Form

$$z_0 \sqcup z_1 \sqcup \cdots \sqcup z_n$$

hat mit

$$z_j = x_0^j \sqcap x_1^j \sqcap \cdots \sqcap x_k^j$$

und $x_i^j \in X$ oder $(x_i^j)^c \in X$ (für alle $j \leq n, i \leq k$).

(Hinweis: folgen Sie dem Beweis des Satzes über die Normalform.)

Aufgabe 12: (a) Geben Sie Generatoren der Lindenbaumalgebra LA_n an. (Definition auf Seite 8 im Skript von Prof. Dr. Ziegler).

(b) Welches sind die Atome der Lindenbaumalgebra LA_n?

Abgabe am Mittwoch, den 14.11.2012, vor der Vorlesung. Geben Sie Ihre Lösungen einschließlich dieses Aufgabenblatts ab. Schreiben Sie auf das Aufgabenblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen und Übungsgruppe.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ws12-13logikfuerinformatik.html