Abteilung für Mathematische Logik 5.11.2011
Prof. Dr. Martin Ziegler
Dr. Giorgio Laguzzi

Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

WS 2012-2013, Übungsblatt 7

Name:	....
Vorname:	....
Matrikelnummer:	....
Übungsgruppe:	....
Tutor:	....

Aufgabe 25: Sei $L = \{F, G, P, a, b, c\}$ eine Sprache der Logik erster Stufe mit einstelligem Funktionssymbol F, zweistelligem Funktionssymbol G, einstelligem Prädikatssymbol P, drei Konstantensymbolen a, b, c. Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenreihen L-Terme sind:

$FGab$	$FGFGacb$	$GGcca$
$GFGbc$	$GaFGccb$	$FGaPc.$

Aufgabe 26: Sei $L = \{F, G, P, R, a, b, c\}$ eine Sprache der Logik erster Stufe mit einstelligem Funktionssymbol F und zweistelligem Funktionssymbol G, einstelligem Prädikatssymbol P und zweistelligem Prädikatssymbol R, drei Konstantensymbolen a, b, c. Entscheiden Sie, ob die folgenden Zeichenreihen L-Formeln sind:

$$\forall v_0(Pv_0 \to c)$$

$$\forall v_0 \exists v_1(Pv_0v_1 \to (a \vee Gv_1v_1))$$

$$(Pv_1 \wedge a) \to (Gv_1 \vee Fv_1)$$

$Pa \to Rab \vee GaFv_1$

$PFGaFGaa$

$PFGaPGaa.$

Aufgabe 27: Eine *Graph* besteht aus eine Menge E_G von *Ecken* und eine Menge K_G von *Kanten*, wobei K_G eine binäre Relation auf E_G ist. Darüber hinaus verlangen wir dass K_G anti-reflexiv (für alle $v \in E_G$, $(v,v) \notin K_G$) und symmetrisch (für alle $u, v \in E_G$: wenn $(u,v) \in K_G$, so ist $(u,v) \in K_G$) ist.

Ist G ein Graph und $k \geq 1$, so ist eine *k-Färbung* von G eine Funktion $f : E_G \to \{1, \ldots, k\}$, so dass für alle $u, v \in E_G$ gilt: ist $(u,v) \in K_G$, so ist $f(u) \neq f(v)$.

Ein Graph G heißt *k-färbbar*, wenn eine k-Färbung von G existiert.

Ein Graph G' heißt ein *Teilgraph* von G, wenn $E_{G'} \subseteq E_G$ und $K_G = K_G \cap E_{G'}^2$, gelten.

Sei G ein Graph und $k \geq 1$. Für jede Ecke v von G und jedes $i = 1, \ldots, k$ sei A_{vi} eine Aussagenvariable. Weiter sei $C_k(G)$ die Formelmenge, die die folgenden Formeln enhält:

- $A_{v1} \vee \cdots \vee A_{vk}$, für jedes $v \in E_G$,
- $\neg(A_{vi} \wedge A_{vj})$, für jedes $v \in E_G$ und $1 \leq i \leq j \leq k$,
- $\neg(A_{vj} \wedge A_{uj})$, für jedes $(u,v) \in K_G$ und $1 \leq j \leq k$.

Zeigen Sie:

1. Es gibt eine Bijektion zwischen den k-Färbungen von G und denjenigen Wahrheitsbelegungen der Variablen A_{vi} ($v \in E_G$, $i = 1, \ldots, k$), die $C_k(G)$ erfüllen.
2. G ist k-färbbar gdw $C_k(G)$ erfüllbar ist.
3. G ist k-färbbar gdw jede endliche Teilgraph von G k-färbbar ist.

Aufgabe 28: Wir definieren $\mathbb{R}^> = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Sei L eine Sprache der Logik erster Stufe mit einem zweistelligem Funktionssymbol G. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{R}^>, \cdot)$ isomorphe L-Strukturen sind.

Abgabe am Mittwoch, den 12.12.2012, vor der Vorlesung. Geben Sie Ihre Lösungen einschließlich dieses Aufgabenblatts ab. Schreiben Sie auf das Aufgabenblatt und auf jedes Arbeitsblatt Ihren Namen und Übungsgruppe.

Alle Übungsblätter finden Sie auf der Seite:
http://home.mathematik.uni-freiburg.de/mottoros/ws12-13logikfuerinformatik.html