Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

WS 2015-2016, Übungsblatt 11

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsgruppe:
Tutor:

Notation: Für eine L -Formel $\psi(x)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\exists^{\geq n} x \psi(x)$ die Formel

$$\exists x_0 \dots \exists x_{n-1} \left(\bigwedge_{i < j < n} \neg(x_i \doteq x_j) \wedge \bigwedge_{i < n} \psi(x_i) \right).$$

Aufgabe 45: Sei $\phi(x)$ eine L -Formel. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gebe es eine L -Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models \exists^{\geq n} x \phi(x)$ und $\mathfrak{A} \models \exists^{\geq n} x \neg\phi(x)$. Folgern Sie, dass es eine L -Struktur $\mathfrak{A}$ gibt mit der Eigenschaft, dass sowohl $\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \phi[a]\}$ als auch $\{a \in A \mid \mathfrak{A} \models \neg\phi[a]\}$ unendlich sind.

Aufgabe 46: Eine Menge von Formeln Γ heißt *maximal widerspruchsfrei*, wenn für alle $\Gamma' \supseteq \Gamma$ widerspruchsfrei, $\Gamma' = \Gamma$ gilt.

Sei Γ maximal widerspruchsfrei. Zeigen Sie:

- (a) $\neg\phi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \notin \Gamma$
- (b) $\phi \wedge \psi \in \Gamma \Leftrightarrow \phi \in \Gamma$ und $\psi \in \Gamma$
- (c) $\exists x \phi(x) \in \Gamma$, wenn es t gibt so dass $\phi(t) \in \Gamma$.

Aufgabe 47: Sei L eine Sprache. Zeigen Sie:

- (a) Wenn eine Theorie T Modelle mit beliebig vielen Elementen hat, dann ist die Theorie

$$T \cup \{ \exists^{\geq n} x(x \doteq x) \mid n \in \mathbb{N} \}$$

widerspruchsfrei.

- (b) Es gibt keine Theorie T , deren Modelle genau die endlichen L -Strukturen sind.

Aufgabe 48: Sei T eine L -Theorie, für die es ein unendliches Modell $\mathfrak{A}$ gibt. Es sei $C = \{ c_a \mid a \in A \}$ eine Menge von Konstanten, $C \cap L = \emptyset$, und es sei $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ das $L \cup C$ -Diagramm von $\mathfrak{A}$, siehe Aufgabe 39. Es sei $c_0 \notin L \cup C$ eine weitere Konstante und $L' = L \cup C \cup \{c_0\}$. Zeigen Sie:

- (a) Die L' -Theorie

$$T' = \mathbf{T}(\mathfrak{A}) \cup \{ \neg c_0 \doteq c_a \mid a \in A \}$$

ist widerspruchsfrei.

- (b) Es gibt ein Modell $\mathfrak{A}'$ von T mit $\mathfrak{A}' \not\cong \mathfrak{A}$.