Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Giorgio Laguzzi

02.11.2015

Übungen zur Vorlesung Logik für Informatiker

WS 2015-2016, Übungsblatt 3

Name:	....
Vorname:	....
Matrikelnummer:	....
Übungsgruppe:	....
Tutor:	....

Aufgabe 9: Sei $B = (X, 0, 1, \sqcup, \sqcap, {}^c)$ eine boolesche Algebra. Sei die binäre Relation $\leq$ auf X definiert durch: Für $a, b \in X$

$$a \leq b \iff a \sqcup b = b,$$

(oder äquivalent, $a \leq b \iff a \sqcap b = a$).

Wir schreiben $a < b$ gdw $a \leq b$ und $a \neq b$. Ein $b \in B \setminus \{0\}$ heißt *Atom* gdw es kein $a \in B$ mit $0 < a < b$ gibt. Eine boolesche Algebra B heißt *atomar* gdw es für jedes $b \in B \setminus \{0\}$ ein Atom $a \leq b$ gibt.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede endliche boolesche Algebra ist atomar.

(b) Wenn eine endliche boolesche Algebra n Atome hat dann hat sie genau 2^n Elemente.

Aufgabe 10: Seien A eine boolesche Algebra und $X \subseteq A$ einer Menge. Bezeichne $B(X)$ die boolesche Algebra, die durch boolesche Kombinationen der Elemente von X gebildet wird. Die Elemente dieser Menge X heißen die *Generatoren* von $B(X)$.

Beweisen Sie, dass jedes Element $b \in B(X)$ die Form

$$z_0 \sqcup z_1 \sqcup \cdots \sqcup z_n$$

hat mit

$$z_j = x_0^j \sqcap x_1^j \sqcap \cdots \sqcap x_k^j$$

und $x_i^j \in X$ oder $(x_i^j)^c \in X$ (für alle $j \leq n, i \leq k$).

(Hinweis: folgen Sie dem Beweis des Satzes über die Normalform.)

Aufgabe 11: Seien

$$X_0 := \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{(a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}$$
$$X_1 := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty,b) : b \in \mathbb{R}\} \cup \{[a,+\infty) : a \in \mathbb{R}\}.$$

Weiterhin betrachten wir die folgenden Operationen: $\sqcup$ ist $\cup$, $\sqcap$ ist $\cap$, und ^{c} ist die Komplement. Bezeichne $B(X_i)$ die boolesche Algebra, die durch boolesche Kombinationen der Elemente von X_i gebildet wird (für $i = 0,1$).

(a) Versuchen Sie, eine allgemeine Form für Elemente von $B(X_i)$ anzugeben, $i = 0,1$.

(b) Hat $\mathcal{B}(X_0)$ Atome?

(c) Hat $\mathcal{B}(X_1)$ Atome?

Aufgabe 12: (a) Geben Sie Generatoren der Lindenbaumalgebra LA_n an. (Definition auf Seite 7 im Skript von Prof. Dr. Ziegler).

(b) Welches sind die Atome der Lindenbaumalgebra LA_n?