Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsstunde in der Woche vom 19.10.2015 - 23.10.2015

1. Eine Menge A heißt *transitiv*, wenn $x \subseteq A$ für alle $x \in A$ (wenn also aus $x \in A$ und $y \in x$ sich $y \in A$ ergibt). Man zeige:
   (a) $\emptyset$ ist transitiv.
   (b) Ist x transitiv und $y \subseteq x$, so ist $x \cup \{y\}$ transitiv. Insbesondere ist $x \cup \{x\}$ transitiv.
   (c) Sind x und y transitiv, so auch $x \cap y$ und $x \cup y$; allgemeiner: Ist A eine nicht leere Menge transitiver Mengen, so sind $\bigcap A$ und $\bigcup A$ transitiv.

2. Geben Sie eine nicht transitive Menge an. Wer findet ein Beispiel mit nur zwei Klammernpaaren?

3. Seien $\mathfrak{A} = (A, <_\mathfrak{A})$ und $\mathfrak{B} = (B, <_\mathfrak{B})$ (lineare) Ordnungen. Wir definieren die umgekehrte Ordnung, die Hintereinanderstellung und das kartesische Produkt linearer Ordnungen wie folgt:
   - $\mathfrak{A}^* := (A, <)$ wobei für $x, y \in A$, $x < y$ gdw $y <_\mathfrak{A} x$.
   - $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} := (A \sqcup B, <)$ ($\sqcup$ heißt disjunkte Vereinigung) wobei für $x, y \in A \sqcup B$, $x < y$ gdw ($x, y \in A$ und $x <_\mathfrak{A} y$) oder ($x, y \in B$ und $x <_\mathfrak{B} y$) oder ($x \in A$ und $y \in B$).
   - $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B} := (A \times B, <)$ wobei für $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \times B$, $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$ gdw ($a_1 <_\mathfrak{A} a_2$) oder ($a_1 = a_2$ und $b_1 <_\mathfrak{B} b_2$).

   $(A, <_A)$ heißt *isomorph zu* $(B, <_B)$, wenn es einen Bijektion $f \colon A \to B$ gibt, so dass $(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 <_A a_2 \leftrightarrow f(a_1) <_B f(a_2))$. Wir schreiben $(A, <_A) \cong (B, <_B)$.

   Man kann sich die folgende Aufgabe vielleicht etwas abkürzen durch folgende Vorüberlegung: $f \colon A \to B$ heißt *ordungserhaltend*, wenn $(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1 <_A a_2 \to f(a_1) <_B f(a_2))$. Zwei Ordnungen $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ sind isomorph, wenn es eine ordungserhaltende Bijektion von A nach B gibt. Man überlege sich: Bei linearen Ordungen erhalten ordungserhaltende Bijektionen auch die Relation $\not<$. Bei Halbordungen muss dies nicht der Fall sein.

   Welche der folgenden Aussagen sind korrekt?
   (a) $(\mathbb{N}^*, <) + (\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{Z}, <)$
   (b) $(\mathbb{N}, <) + (\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{Z}, <)$
   (c) $(\mathbb{Q}, <) + (\mathbb{Q}, <) \cong (\mathbb{Q}, <)$
   (d) $(\mathbb{R}, <) + (\mathbb{R}, <) \cong (\mathbb{R}, <)$
   (e) $(\{0, 1\}, <) + (\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N}, <)$
   (f) $(\mathbb{N}, <) + (\{0, 1\}, <) \cong (\mathbb{N}, <)$
   (g) $(\{0, 1\}, <) \times (\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N}, <)$
   (h) $(\mathbb{N}, <) \times (\{0, 1\}, <) \cong (\mathbb{N}, <)$

4. (a) Gilt für jede echte Klasse A, dass $\bigcup A$ eine echte Klasse ist?
   (b) Man zeige: ist a eine nicht leere Menge und B eine echte Klasse, so ist ${}^aB := \{f \in \mathbf{V} : f(a) \in B\}$ eine echte Klasse.
   (c) Man zeige, dass für jede Klasse B, ${}^\emptyset B = \{\emptyset\}$ ist. Insbesondere ist auch ${}^\emptyset\emptyset = \{\emptyset\}$.