Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Menegenlehre

Wintersemester 2015-2016

Abgabe am 26.10.2015

1. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (a) x ist eine transitive Menge, und $\in$ ist konnex auf x (d.h., für alle $u, v \in x$ ist $u \in v$ oder $v \in u$ oder $u = v$).

   (b) x ist eine transitive Menge, und $(x, \in)$ ist eine lineare Ordnung.

   (c) x ist eine transitive Menge, und $\exists f \exists \alpha$ (α ist eine Ordinalzahl und $f : (x, \in) \to (\alpha, \in)$ isomorph).

   Gilt ein Analogon für Klassen statt Mengen?

2. Geben Sie eine transitive Menge an, auf der $\in$ konnex ist. Wer findet ein Beispiel mit nur vier Klammernpaaren?

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Operation $\bigcup^{(n)}$ wie folgt:

   - $\bigcup^{(0)} x = x$,
   - $\bigcup^{(n+1)} x = \bigcup(\bigcup^{(n)} x)$.

   (a) Finden Sie eine Menge x, so dass $\bigcup^{(n+1)} x = \emptyset$ und $\bigcup^{(n)} x \neq \emptyset$.

   (b) Finden Sie eine Menge $x \neq \emptyset$, so dass $\bigcup x = x$.

4. Sei R eine Äquivalenzrelation auf der echten Klasse A und T ein Repräsentantensystem von R. Man zeige, dass (a) oder (b) gilt:

   (a) T ist eine echte Klasse;

   (b) Es gibt ein $w \in A$, so dass $w/R := \{u \in A : wRu\}$ eine echte Klasse ist.

   Man gebe Beispiele an, bei denen:

   - (a) und (b) bzw.,
   - (a) und nicht (b),
   - nicht (a) und (b)

   gelten.