Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 10, Abgabe am 11.01.2016

1. Seien M ein abzählbares transitives Modell von ZFC^{**}, $\mathbb{P}$ eine Halbordnung in M, und G ein nicht-leerer Filter über $\mathbb{P}$. Mit $\operatorname{rank}(x)$ bezeichnen wir den $\in$-Rang einer Menge. Ein hochgestelltes M bedeutet Relativierung nach M, die Definition der Funktion wird also in M gelesen, und es sind nur Argumente und Bildpunkte in M zugelassen. Wir schreiben $o(M)$ für $\mathbf{On} \cap M$.

   Zeigen Sie:

   - $\forall x \in M(\check{x} \in M \wedge \operatorname{val}(\check{x}, G) = x)$
   - $M \subseteq M[G]$. In der Vorlesung wurden die ersten zwei Punkte für generische Filter gezeigt. Überlegen Sie sich, dass die Filter-Eigenschaft genügt.
   - $\forall \tau \in M^{\mathbb{P}}(\operatorname{rank}(\tau_G) \leq \operatorname{rank}(\tau) = \operatorname{rank}^M(\tau))$
   - $o(M[G]) = o(M)$, und dies ist eine Ordinalzahl.

2. Seien $\sigma, \tau \in M^{\mathbb{P}}$. Zeigen Sie, dass $\sigma_G \cup \tau_G = (\sigma \cup \tau)_G$.

3. Ein Satz von Tarski. Sei $(P, \leq_P)$ eine Halbordnung. Es gebe in P Antiketten von beliebig großer endlicher Mächtigkeit. Gibt es dann auch eine unendliche Antikette?

4. Geben Sie ein genügend großes Fragment ZFC^{**} an, so dass folgendes gilt: Seien M ein abzählbares transitives Modell von ZFC^{**}, $\mathbb{P}$ eine unendliche Halbordnung in M. Dann gibt es $H \subseteq \mathbb{P}$ gibt, so dass $M[H]$ kein Modell von $ZF^{**} - P$ ist.

   Hinweise: Sei $f \in M$, so dass $f : \omega \times \omega \to \mathbb{P}$ bijektiv ist. Betrachten Sie H so dass $(\omega, f^{-1}(H))$ eine Wohlordnung vom Typ $> o(M)$ ist. Freiwilliger Zusatz (2 Bonuspunkte): Wenn $\mathbb{P}$ nicht atomar ist, kann man H als Filter wählen.