Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 11, Abgabe am 18.01.2016

Eine Boole'sche Algebra $(B, \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ heißt vollständig, wenn jede Teilmenge $A \subseteq B$ ein Infimum und ein Supremum hat. $i = \bigvee A$ $[\bigwedge A]$ heißt Infimum [Supremum] von A, wenn für alle $a \in A$ $i \leq a$ $[i \geq a]$ und i das größte [kleinste] Element mit dieser Eigenschaft ist. Wir schreiben $i \leq a$ für $i \cap a^c = 0$.

1. Sei $\mathbb{P}$ eine Halbordnung. Zeigen Sie: Es gibt eine vollständige Boole'sche Algebra B und eine Abbildung $i : \mathbb{P} \to B \setminus \{0\}$ mit folgenden Eigenschaften:

   - $i"\mathbb{P}$ ist dicht in $B \setminus \{0\}$
   - $\forall p, q \in \mathbb{P}(q \leq p \Rightarrow i(q) \leq i(p))$
   - $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \perp q \Leftrightarrow i(p) \wedge i(q) = 0)$.

   (*Hinweise*: Für jedes $p \in \mathbb{P}$ definieren wir $N_p := \{q \in \mathbb{P} : q \leq p\}$. Betrachten Sie die Topologie über $\mathbb{P}$, die durch die Basis $\{N_p \ : \ p \in \mathbb{P}\}$ gebildet wird. Eine Teilmenge A eines topologischen Raumes heißt offen und regulär (oder regulär offen), wenn $A = \text{int cl}(A)$, d.h. A der offene Kern des Abschlusses von A ist. Nehmen Sie $B := \text{ro}(\mathbb{P})$, das ist die Menge der regulär offenen Teilmengen von $\mathbb{P}$ mit der angegebenen Topologie, und nehmen Sie als Einbettung $i(p) := \text{int cl}(N_p)$. Wie sind $\vee$, $\wedge$, ^{c}, 0, 1 definiert, so dass $(\text{ro}(\mathbb{P}), \vee, \wedge, ^c, 0, 1)$ eine volständige Boole'sche Algebra ist?) Bemerkung (nicht als Aufgabe gedacht): Wenn $\mathbb{P}$ separativ ist (siehe nächstes Aufgabenblatt), dann ist i injektiv.

2. Sei M ein abzählbares transitives Modell von ZFC^* und $B \in M$, so dass

   $$(B \text{ ist eine vollständige Boole'sche Algebra})^M.$$

   Für $\tau_1, \ldots \tau_n$ $\mathbb{P}$-Namen in M und eine $\mathscr{L}(\in)$-Formel ϕ definieren wir

   $$\|\phi(\tau_1, \ldots \tau_n)\| := \bigvee \{p \in B : p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\}.$$

   Zeigen Sie, dass:

   (a) $\forall p \in B(p \Vdash \phi(\tau_1, \ldots, \tau_n) \Leftrightarrow p \leq \|\phi(\tau_1, \ldots \tau_n)\|)$.
   (b) $\|\phi(\tau_1, \ldots \tau_n) \wedge \psi(\tau_1, \ldots \tau_n)\| = \|\phi(\tau_1, \ldots \tau_n)\| \wedge \|\psi(\tau_1, \ldots \tau_n)\|$.
   (c) $\|\neg\phi(\tau_1, \ldots \tau_n)\| = \|\phi(\tau_1, \ldots, \tau_n)\|^c$.
   (d) $\|\exists x \phi(x, \tau_1, \ldots \tau_n)\| = \bigvee \{\|\phi(\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n)\| : \sigma \in M^B\}$.

3. Sei $\mathbb{P}$ ein Forcing. Zeigen Sie: Für jedes Element x von $M[G] \setminus M$ gibt es von M aus gesehen eine echte Klasse von Namen $\sigma \in M^{\mathbb{P}}$, so dass $\sigma[G] = x$.

4. Sei G ein Filter. Welche der folgenden Bedingungen sind äquivalent?

   (a) $G \cap D \neq \emptyset$ für jedes $D \in M$, das eine dichte Teilmenge von $\mathbb{P}$ ist;
   (b) $G \cap A \neq \emptyset$ für jedes $A \in M$, das eine maximale Antikette von $\mathbb{P}$ ist;
   (c) $G \cap E \neq \emptyset$ für jedes $E \in M$, das die folgende Eigenschaft hat: $\forall p \in \mathbb{P} \exists q \in E(p \not\perp q)$. Man nennt solche E prädicht.