Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 12, Abgabe am 25.01.2016

1. Eine Forcing $\mathbb{P}$ heißt *separativ*, wenn $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \not\leq q \Rightarrow \exists r \leq p(r \perp q))$. Sei $\mathbb{P}$ separativ. Welche die folgenden Aussagen gilt:
   (a) $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq q \Rightarrow p \Vdash \check{q} \in \dot{G})$?
   (b) $\forall p, q \in \mathbb{P}(p \leq q \Leftarrow p \Vdash \check{q} \in \dot{G})$?
   (c) Nun verzichten wir auf die Separativität. Gilt a) immer noch? Gilt b) immer noch? Begründen Sie die Antwort.

In den Aufgaben 2, 3, 4 sei $\mathbb{P} := \mathrm{Coll}(\omega, \omega_1) = \mathrm{Fn}(\omega, \omega_1, \omega) := \{p : p : A \to \omega_1, A \subseteq \omega_1 \text{ endlich}\}$, mit $q \leq p :\Leftrightarrow q \supseteq p$. Diese Forcinghalbordnung wird auch „Lévy-Kollaps von ω_1“ genannt. Sei G $\mathbb{P}$-generisch über M, und sei $f_G := \bigcup\{p : p \in G\} = \bigcup G$. Sei N ein ctm. Wir schreiben ω_n^N für das Element $x \in V$, so dass $N \models x = \omega_n$. Überlegen Sie sich, dass x eine Ordinalzahl ist.

2. Zeigen Sie:
   (a) $M[G] \models f_G$ ist eine Funktion.
   (b) $M[G] \models \mathrm{dom}(f_G) = \omega$. Schließen Sie: $\emptyset \Vdash \mathrm{dom}(\dot{f}_G) = \check{\omega}$.
   (c) $M[G] \models \mathrm{rng}(f_G) = \omega_1^M$. Wie lautet nun die entsprechende Formulierung in der Forcingsprache?

3.
   (a) Ist $\omega_1^M = \omega_1^{M[G]}$, oder gilt $\omega_1^M < \omega_1^{M[G]}$ oder $\omega_1^M > \omega_1^{M[G]}$? Begründen Sie die Antwort.
   (b) Eine der drei Möglichkeiten kann bei keinem Forcing vorkommen. Welche? Warum?
   (c) Finden Sie einen Satz φ aus der Forcingsprache und zwei $\mathbb{P}$-generische Filter G_1 und G_2 über M, so dass $M[G_1] \models \varphi$ und $M[G_2] \models \neg\varphi$.

4. Sei $M \models \mathrm{CH}$. Ist $\omega_2^M = \omega_1^{M[G]}$?