Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 13, Abgabe am 01.02.2016

1. Seien $\mathbb{P}$ eine Forcinghalbordnung, H eine Untergruppe von $\mathrm{Aut}(\mathbb{P})$, und seien $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}'$ Filter auf H. Sei τ ein $\mathbb{P}$-Name.
   (a) Gilt τ $\mathscr{F}$ symmetrisch $\Rightarrow \tau$ $\mathscr{F}'$ symmetrisch?
   (b) Gilt $M_{\mathscr{F}}[G] \subseteq M_{\mathscr{F}'}[G]$?

Wir definieren das *Random Forcing* $\mathbb{B}$ wie folgt: Sei μ das Lebesgue-Maß auf dem reellen Intervall $[0, 1]$. Betrachten Sie

$$\mathscr{B} := \{b \subseteq [0, 1] : b \text{ Borel und } \mu(b) > 0\}$$

und die folgende Äquivalenzrelation: $b \equiv b' \Leftrightarrow \mu(b \triangle b') = 0$. Wir schreiben $[b]_\equiv$ für die $\equiv$-Äquivalenzklasse von b und $\mathscr{B}/\equiv$ für $\mathscr{B}$ modulo $\equiv$. Sei

$$\mathbb{B} := (\mathscr{B}/{\equiv}, \subseteq),$$

d.h., $[b']_\equiv \leq [b]_\equiv \Leftrightarrow b' \subseteq b$.

2. Sei G ein $\mathbb{B}$-generischer Filter über M. Zeigen Sie: Vorsicht: in der vorigen Version fehlte der Abschluss. Wir schreiben $\mathrm{cl}(b)$ für den Abschluss von b in der üblichen Topologie auf dem Intervall $[0, 1]$.
   (a) $\bigcap\{\mathrm{cl}(b) : [b]_\equiv \in G\}$ ist nicht leer.
   (b) wenn $x, y \in \bigcap\{\mathrm{cl}(b) : [b]_\equiv \in G\}$, dann $x = y$.

   Wenn $\bigcap\{\mathrm{cl}(b) : [b]_\equiv \in G\} = \{r\}$, so heißt r "random real" über M.

3. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}$ die c.c.c. hat.

Eine Forcinghalbordnung heißt ω^ω*-bounding*, wenn für jedes $\tau \in M^{\mathbb{P}}$ und jedes $p \in \mathbb{P}$, so dass $p_{\mathbb{P}} \Vdash \tau \in \omega^\omega$ ein $f \in \omega^\omega \cap M$ und ein $q \leq p$ gibt, so dass $q_{\mathbb{P}} \Vdash \forall n \in \omega(\tau(n) \leq f(n))$.
Wir schreiben $\mu(b)$ für das Lebesgue-Maß von c für $c \in [b]_\equiv \in \mathbb{B}$.

4. Zeigen Sie, dass $\mathbb{B}$ ω^ω-bounding ist. (*Hinweise*: Für jedes $b \in \mathbb{B}$ finden Sie $\{b_n : n \in \omega\}$ und $\{A_n : n \in \omega\}$ mit die folgenden Eigenschaften:
   - $b_0 = b$ und für jede $n \in \omega$, $b_n \in \mathbb{B}$, $b_{n+1} \subseteq b_n$, und $\mu(b_{n+1}) \geq (1 - 2^{-n})\mu(b_n)$;
   - für jede $n \in \omega$, $A_n \subseteq \omega$, $|A_n| < \omega$ und $b_n \Vdash \tau(n) \in A_n$.

   Man setzt $b' := \bigcap_{n\in\omega} b_n$ und $f(n) := \max A_n$. Man zeigt: $b' \in \mathbb{B}$ und $b' \Vdash \forall n \in \omega(\tau(n) \leq f(n))$.)