Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 14, Abgabe am 08.02.2016

1. Eine Forcinghalbordnung heißt atomar, wenn sie ein Atom hat. Ein Atom ist eine Bedingung p, so dass es keine echt stärkere Bedingung gibt. $q < p$ heißt echt stärker als p, wenn es $\leq p$ ist und mit einem $r < p$ unverträglich ist. Zum Beispiel ist in der Forcinghalbordnung $(\mathbb{N}, \geq)$ die 0 ein Atom. Seien $\mathbb{P}$ eine abzählbare nicht atomare Forcinghalbordnung und $\mathbb{C} := \{p \in \mathrm{Fn}(\omega, \omega) : \mathrm{dom}(p) \in \omega\}$. Zeigen Sie, dass es eine dichte Einbettung $i : \mathbb{P} \to \mathbb{C}$ gibt.

2. Mit $\mathbb{B}$ meinen wir das Random Forcing vom Blatt 13. Gibt es eine völlstandige Einbettung $i : \mathbb{C} \to \mathbb{B}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Seien μ, κ reguläre Kardinalzahlen.

   (a) Sei $\mathbb{P}$ ein $< \mu$-abgeschlossene Forcinghalbordnung. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}$ keine neue Folge mit Länge $< \mu$ zum Grundmodell hinzufügt, d.h. wenn $\theta \in M[G]$ eine Folge mit Länge $< \mu$ und Einträgen aus M ist, ist $\theta \in M$.

   (b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lv}(\mu, \kappa) = \mathrm{Fn}(\mu, \kappa, \mu)$ keine Kardinalzahlen $< \mu$ kollabiert, d.h. für jede Kardinalzahl $\eta < \mu$, $(\eta \text{ ist eine Kardinalzahl})^{M[G]}$.

4. Seien μ eine reguläre Kardinalzahl und κ eine stark unerreichbare Kardinalzahl, d.h. κ ist regulär und $\forall \alpha < \kappa (2^\alpha < \kappa)$.

   Wir definieren nun $\mathrm{Lev}(\mu, < \kappa)$ als die Menge der Funktionen p mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned}
&p \colon \mathrm{dom}(p) \to \kappa \\
&\mathrm{dom}(p) \subseteq \mu \times \kappa \\
&|\mathrm{dom}(p)| < \mu \\
&(\forall \gamma \in \mu)(\forall \alpha \in \kappa)(p(\gamma, \alpha) \in \alpha).
\end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lv}(\mu, < \kappa)$ die κ-cc hat.

   Zeigen Sie: Für jedes $\alpha \in [\mu, \kappa)$ ist

$$\bigcup \{p(\cdot, \alpha) \ : \ p \in G\} \colon \mu \to \alpha$$

   surjektiv. Alle Kardinalzahlen im Intervall $([\mu, \kappa))^M$ sind in $M[G]$ vom Wert μ.