Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 2, Abgabe: 02.11.2015

1. Wir möchten das Analogon des Trichotomiesatzes nun für lineare Ordnungen statt für Wohlordnungen beweisen. Gelingt das? Falls Sie dies verneinen, führen Sie ein Gegenbeispiel an.

2. Wir betrachten die gewöhnliche lineare Ordnung der rationalen Zahlen, $(\mathbb{Q}, <)$. Wir sagen $D \subseteq \mathbb{Q}$ *ist (oder liegt) dicht in* $\mathbb{Q}$, wenn

$$\forall q \in \mathbb{Q} \forall r \in \mathbb{Q}(q < r \rightarrow \exists d \in D(q < d < r)).$$

Sei nun $D \subseteq \mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{Q}$. Ist $(D, <)$, oder genauer $(D, < \cap (D \times D))$, isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$?

Geben Sie ein Beispiel einer in $(\mathbb{Q}, <)$ dicht liegenden echten Teilmenge.

Gibt es eine nicht dicht liegende Menge $S \subseteq \mathbb{Q}$, so dass $(S, <)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, <)$ ist?

3. Sei x eine transitive Menge, $n \in \mathbb{N}$, und sei $x_n \in x_{n-1} \in \cdots \in x_0 \in x$. Ist $x_n \in x$? Hat jede Menge eine transitive Obermenge? Hat jede Menge eine $\subseteq$-kleinste transitive Obermenge?

4. Seien (A, R) und (B, S) Wohlordnungen. Sei $C = A \times B$ und

$$T := \{((a_0, b_0), (a_1, b_1)) \in C \times C : (a_0 R a_1) \vee (a_0 = a_1 \wedge (b_0 S b_1))\}.$$

Ist (C, T) eine Wohlordnung?