Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 3, Abgabe am 09.11.2015

1. Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge, und sei R eine fundierte Relation auf A. Wir definieren $\mathrm{rk}\colon A \to \mathbb{V}$ wie folgt:

   $$\mathrm{rk}(a) = \bigcup\{S(\mathrm{rk}(b)) : bRa\}.$$

   Geben Sie eine Operation $\mathbf{F}$ an, so dass $\mathbf{F}$ wie im Satz über die transfinite Rekursion (mit der Relation (A, R) anstelle von $(\mathbf{On}, \in)$) die Existenz von rk rechtfertigt. Überlegen Sie sich auch, warum man mit der Relation (A, R) anstelle von $(\mathbf{On}, \in)$ arbeiten kann. Haben Sie eine einschränkendere Beschreibung der Bildmenge von rk?

2. Sei wieder (A, R) eine fundierte Relation.
   (a) Gibt es eine zweistellige Relation $R' \supseteq R$, so dass (A, R') eine Wohlordnung ist?
   (b) Gibt es eine ordungserhaltende Surjektion von (A, R) auf eine Wohlordnung?

Vorspann zu Aufgabe 3 und zu Aufgabe 4:
Sei X eine Menge. Wir definieren die folgenden Varianten des Auswahlaxioms:

- $\mathrm{AC}_\omega(X)$ (*Abzählbares Auswahlaxiom auf* X): Für jedes $\{P_n : n \in \omega\}$ mit $P_n \subseteq X$, es gibt eine Funktion $f : \omega \to V$, so dass $\forall n \in \omega(f(n) \in P_n)$.
- $\mathrm{DC}(X)$ (*Abhändige-Auswahlen-Axiom auf* X): Für jedes $R \subseteq X \times X$ mit $\forall x \in X \exists y \in X((x, y) \in R)$, es gibt eine Folge $\langle x_n : n \in \omega\rangle$, so dass $\forall n \in \omega((x_n, x_{n+1}) \in R)$.
- AC_ω (*Abzählbares Auswahlaxiom*): Für alle Mengen X gilt $\mathrm{AC}_\omega(X)$.
- DC (*Abhändige-Auswahlen-Axiom, axiom of dependent choice*): Für alle Mengen X gilt $\mathrm{DC}(X)$.

3. Zeigen Sie: Wenn es eine surjektive Funktion $f : Y \to X$ gibt, dann $\mathrm{AC}_\omega(Y) \Rightarrow \mathrm{AC}_\omega(X)$ und $\mathrm{DC}(Y) \Rightarrow \mathrm{DC}(X)$.

4. Wir betrachten die folgenden möglichen Implikationen:

   $\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{AC}$

   $\mathrm{AC}_\omega \to \mathrm{DC}$

   $\mathrm{AC} \to \mathrm{DC}$

   $\mathrm{AC} \to \mathrm{AC}_\omega$

   $\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}_\omega$

   $\mathrm{DC} \to \mathrm{AC}$

   Finden Sie die drei unter diesen, die aus ZF folgen, und beweisen Sie diese. Die technischen Mittel zum Beweis der Nicht-Implikationen werden wir in der Vorlesung kennen lernen.