**Abteilung für Mathematische Logik**
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

# Mengenlehre

## Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 4, Abgabe am 16.11.2015

1. Ist $(V_\omega, \in)$ ein Modell von ZFC? Welches Axiom fehlt?

2. Sei $A$ eine nicht leere Menge, $I \subseteq \mathscr{P}(A)$ heißt *Ideal auf $A$ (oder über $A$)*, falls:

   i. $\emptyset \in I$ und $A \notin I$, und

   ii. $\forall a, b \in I (a \cup b \in I)$, und

   iii. $\forall b \in I \forall a \in A (a \subseteq b \Rightarrow a \in I)$.

   Ein Ideal $I$ heißt *Primideal*, falls $\forall J \supsetneq I$, ($J$ Ideal $\Rightarrow A \in J$).

   Zeigen Sie:

   (a) Jedes Ideal lässt sich zu einem Primideal erweitern.

   (b) $I$ ist genau dann Primideal, wenn $\forall a \in A (a \in I \vee A \setminus a \in I)$

Vorpsann zu Aufgabe 3 und zu Aufgabe 4: Das *Sammlungsschema (Collection scheme)*: Für alle $\varphi \in \mathscr{L}(\in)$ mit $\mathrm{fr}(\varphi) \subseteq \{x, y, A, w_1, \ldots, w_n\}$ gilt folgendes:

$$\forall A \forall w_1 \ldots w_n (\forall x \in A \exists y \varphi \to \exists Y \forall x \in A \exists y \in Y \varphi).$$

3. Zeigen Sie: ZF $-$ Ersetzungsschema $+$ Sammlungsschema $\to$ Ersetzungsschema

4. Zeigen Sie: ZF $\to$ Sammlungsschema

   Diese Aufgabe ist anspruchsvoll.

   *Hinweise:* Wir nehmen eine Formel $\psi(x, \beta)$, die sagt:

   $$\exists y \varphi(x, y) \wedge y \in V_\beta \wedge \beta \text{ ist die kleinste Ordinalzahl mit dieser Eigenschaft.}$$

   Warum kann man $\psi$ erststufig ausdrücken? Ist $\beta \mapsto V_\beta$ erststufig? Nach welchem Satz?

   Aus welchem Axiom folgt: $\exists y \varphi(x, y) \to \exists \beta \psi(x, \beta)$?

   Wenden Sie das Ersetzungsaxiom auf $\psi$ an. Sind die Voraussetzungen dazu erfüllt? Wie hängt eine Obermenge der Bildmenge von $\psi$ mit einer Menge der gesuchten Art zusammen? Womöglich betrachten Sie zwei Fälle, je nachdem, ob es eine größte Ordinalzahl in der durch das Ersetzungsaxiom gegebenen Menge gibt oder nicht.