Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 5, Abgabe am 23.11.2015

Wir definieren rekursiv über $\alpha < \omega_1$ die *Borel-Hierarchie* wie folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}^0_0 &:= \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ offen}\} \\
\mathbf{\Pi}^0_0 &:= \{X \subseteq \mathbb{R} : X \text{ abgeschlossen}\} \\
\mathbf{\Sigma}^0_\alpha &:= \{X = \bigcup_{n\in\omega} Y_n : Y_n \in \bigcup_{\beta<\alpha} \mathbf{\Sigma}^0_\beta \cup \mathbf{\Pi}^0_\beta\} \\
\mathbf{\Pi}^0_\alpha &:= \{X \subseteq \mathbb{R} : \exists Y \in \mathbf{\Sigma}^{\mathbf{0}}_\alpha (X = \mathbb{R} \setminus Y)\}
\end{aligned}$$

Zum Schluss definieren wir **Bor** $:= \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha$. Sie dürfen unbewiesen benutzen: Die Menge **Bor** ist die Menge der Borelmengen (d.h. die kleinste σ-Algebra, die die offenen Mengen enthält und unter abzählbaren Vereinigungen und Komplementen abgeschlossen ist.) Überlegen Sie sich für sich, wie sie sich die Borel'sche σ-Algebra am günstigsten vorstellen. Verschiedene Vorstellungen, die jeweils unterschiedliche Aspekte beleuchten, sind in der Mathematik oft nützlich.

1. (a) Was ist die Kardinalität von $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f \text{ ist stetig}\}$? Beweisen Sie Ihre Antwort.
   (b) Was ist die Kardinalität von **Bor**? Beweisen Sie Ihre Antwort.

2. Wie immer sind alle Antworten zu beweisen.
   (a) ZF. Sei $f : \omega_\alpha \to B$ surjektiv. Gibt es eine Ungleichung zwischen B und ω_α?
   (b) ZF. Sei $f : A \to B$ surjektiv. Können Sie aus f eine Surjektion von $\mathscr{P}(A)$ auf $\mathscr{P}(B)$ definieren?

Eine Menge A heißt *Dedekind-unendlich,* gdw eine Bijektion von A auf eine echte Teilmenge gibt. Eine Menge A heißt *endlich*, gdw es eine natürliche Zahl n gibt, so dass $n \sim A$. Eine Menge heißt *unendlich*, gdw sie nicht endlich ist. Sie könnte auch keine Mächtigkeit haben.

3. In ZFC.
   (a) Ist jede Dedekind-unendliche Menge unendlich?
   (b) Ist jede unendliche Menge Dedekind-unendlich?

   Wo benutzen Sie das Auswahlaxiom?

4. ZF. Falls A eine unendliche Menge ist, dann ist $\mathscr{P}(\mathscr{P}(A))$ Dedekind-unendlich. $\mathscr{P}(A)$ bezeichnet die Potenzmenge von A.