Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 6, Abgabe am 30.11.2015

1. Sei λ eine reguläre Kardinalzahl. Sei $\langle \kappa_i : i < \lambda \rangle$ eine schwach monoton steigende Folge unendlicher Kardinalzahlen. Eine Folge $\langle a_i : i \in \lambda \rangle$ heißt schwach monoton steigend, wenn gilt $i < j \in \lambda \to a_i \leq a_j$.
   - Gilt $\prod_{i<\lambda} \kappa_i \leq (\sup_{i<\lambda} \kappa_i)^\lambda$?
   - Gilt $\prod_{i<\lambda} \kappa_i \geq (\sup_{i<\lambda} \kappa_i)^\lambda$?

2. Für jede Menge x betrachten wir $\mathrm{th}(x) = \bigcup\{\bigcup^{(n)} x : n \in \omega\}$ die *transitive Hülle von* x (Def. 1.45, Seite 16, Skript von Heike Mildenberger). Wir definieren $H_{\omega_1} := \{x : \mathrm{th}(x) < \omega_1\}$, die Menge der erblich abzählbaren Mengen. Ist $(H_{\omega_1}, \in)$ ein Modell von ZFC? Welches Axiom fehlt? Welche Axiome von ZFC gelten in $(H_\kappa, \in)$, wenn κ eine starke Limeskardinalzahl ist? Eine Kardinalzahl κ heißt starke Limeskardinalzahl, wenn für alle $\mu < \kappa$ die Ungleichung $2^\mu < \kappa$ gilt.

Sei α eine Ordinalzahl. Eine Teilmenge $X \subseteq \alpha$ heißt eine *offene Halbgerade* gdw es $\beta < \alpha$ gibt, so dass $X := \{\xi < \alpha : \xi > \beta\}$ oder $X := \{\xi < \alpha : \xi < \beta\}$. Wir betrachten die *Ordnungstopologie von* α, d.h. die Topologie, die die Menge der offenen Halbgeraden als Subbasis hat. (In dieser Topologie sind genau die Vereinigungen von offenen Intervallen offene Mengen.)

3. (a) Gibt es isolierte Punkte?
   (b) Zeigen Sie: $C \subseteq \alpha$ ist genau dann abgeschlossen, wenn
   $$\forall \lambda < \alpha(\lambda \text{ Limes } \wedge \lambda = \bigcup(C \cap \lambda) \to \lambda \in C).$$
   (c) Ist die Ordnungstopologie von α hausdorffsch?
   (d) Zeigen Sie: α mit der Ordnungstopologie hat genau dann eine abzählbare Basis, wenn $\alpha < \omega_1$ ist.

4. Wir betrachten ω_1 mit die Ordnungstopologie. Sei $f : \omega_1 \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass
   $$\exists \alpha < \omega_1 \forall \beta > \alpha(f(\beta) = f(\alpha)).$$
   (Hinweise: Sei $L := \{\lambda < \omega_1 : \lambda \text{ Limes}\}$. Für $\epsilon > 0$, finden Sie eine Funktion $g : L \to \omega_1$ so dass für alle $\alpha \in L$, $g(\alpha) < \alpha$ und gibt es ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ so dass $f[(g(\alpha), \alpha)] \subseteq I$. Dann verwenden Sie das Lemma von Fodor für g. Zum Schluss wiederholt man den Vorgang für eine fallende Folge $\{\epsilon_n : n \in \omega\}$ und Intervalle I der Länge ϵ_n.)

5. (Freiwillige Zusatzaufgabe. Es gibt Bonuspunkte.) Für welche α gibt es eine ordungstreue Injektion $f : (\alpha, \in) \to (\mathbb{R}, <)$? (Hinweis: Eine Obergrenze für diese α leitet sich aus Aufgabe 4 ab. Für die andere Hälfte der Antwort kann man eine Definition durch Rekursion suchen.)