Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 7, Abgabe am 7.12.2015

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}, \mathbb{Q} \in L_{\omega+\omega}$.

Sei X eine Menge, so dass $|X| > \omega$. Wir schreiben

$$[X]^\omega = \{Y \subseteq X \ : \ |Y| = \omega\}.$$

Eine Menge $C \subseteq [X]^\omega$ heißt *club in* $[X]^\omega$ gdw

- $\forall a \in [X]^\omega \exists c \in C(c \supseteq a)$, und
- $\forall (c_n : n \in \omega)\big((\forall n \in \omega)(c_n \in C \wedge c_n \subseteq c_{n+1}) \Rightarrow \bigcup_{n\in\omega} c_n \in C\big)$.

Überlegen Sie sich, dass man besser „konfinal“ als „ungeschränkt“ sagen sollte.

2. Sei $C \subseteq [\omega_1]^\omega$ und $C' := \{c \in C : c \in \omega_1\}$.

   (a) Zeigen Sie:

   C ist Obermenge einer club Menge in $[\omega_1]^\omega$, genau dann, wenn
   C' eine club Menge in ω_1 als Teilmenge enthält.

   (b) Gilt: C' club in $\omega_1 \ \rightarrow \ C$ club in $[\omega_1]^\omega$?

   (c) Gilt: C club in $[\omega_1]^\omega \ \rightarrow \ C'$ club in ω_1?

3. Sei $\mathscr{A} := (A, \dots)$ eine Struktur in einer abzählbaren Sprache und sei $|A|$ überabzähbar. Zeigen Sie:

   $$\{X \subseteq A : X \prec \mathscr{A},\, X \text{ abzählbar}\} \text{ ist club in } [A]^\omega.$$

   Wir schreiben $X \prec \mathscr{A}$ für „X ist Träger einer elementaren Substruktur von $\mathscr{A}$.“

4. Bestimmen Sie die Komplexität von

   (a) „X ist eine Ordinalzahl“

   (b) „X ist eine Kardinalzahl“

   (c) „X ist abzählbar“

   in der Lévy-Hierarchie.