

Mengenlehre
Wintersemester 2015-2016
Übungsblatt 8, Abgabe am 14.12.2015

1. Ist $\{\alpha < \omega_1 : L_\alpha \prec L_{\omega_1}\}$ club in ω_1 ? Beweisen Sie Ihre Antwort.
2. Sei T eine Theorie. Wir schreiben $\text{Con}(T)$ als Abkürzung für „ T ist konsistent“. Zeigen Sie:

$$\text{CON}(\text{ZFC}) \Rightarrow \text{CON}(\text{ZFC} + \neg \exists \kappa (\kappa \text{ stark unerreichbar})).$$

(Hinweise: Man betrachtet $M := \{x : \kappa \text{ stark unerreichbar} \Rightarrow x \in V_\kappa\}$)

3. Zeigen Sie, dass „ (x, R) ist fundiert“ als Δ_1^{ZF} -Formel ausgedrückt werden kann.

Eine Operation $F: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$ heißt Δ_1^F , wenn es eine Σ_1 -Formel $\phi(x, y)$ gibt, so dass

$$F \vdash F \text{ ist eine Operation und } (F(x) = y \leftrightarrow \phi(x, y)).$$

4. Zeigen Sie:

(a) Die Operation $x \mapsto \text{th}(x)$ ist Δ_1^{ZF} .

(b) Sei $\text{rank}(x) = \min\{\alpha : x \in V_\alpha\}$. Die Operation $x \mapsto \text{rank}(x)$ ist Δ_1^{ZF} .