Abteilung für Mathematische Logik
Prof. Dr. Heike Mildenberger
Dr. Giorgio Laguzzi

Mengenlehre

Wintersemester 2015-2016

Übungsblatt 9, Abgabe am 21.12.2015

1. (a) Wir definieren: $x\mathbf{R}y$ gdw $x \in \bigcup y$. Ist $(\mathbf{V}, \mathbf{R})$ fundiert? ist $(\mathbf{V}, \mathbf{R})$ mengenähnlich?

   (b) Wir definieren: $x\mathbf{S}y$ gdw $\bigcup x \in y$. Ist $(\mathbf{V}, \mathbf{S})$ fundiert? ist $(\mathbf{V}, \mathbf{S})$ mengenähnlich?

   Begründen Sie Ihre Antworten.

2. Die Variablen x, y rangieren über Mengen.

   (a) Sei $\mathbf{M}$ eine transitive Klasse, so dass $\mathbf{M}$ das Aussonderungsschema und $\forall x \subseteq \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M}(x \subseteq y)$ erfüllt. Zeigen Sie, dass $\mathbf{M}$ ein Modell von ZF ist.

   (b) Sei $\mathbf{M}$ eine transitive echte Klasse, so dass $\mathbf{M}$ ein Modell von ZF ist. Zeigen Sie, dass $\mathbf{M}$ die Formel $\forall x \subseteq \mathbf{M} \exists y \in \mathbf{M}(x \subseteq y)$ erfüllt.

3. Wir definieren $[\omega]^{<\omega} := \{x \subset \omega : x \text{ ist endlich}\}$. Sei $\beta : \omega \to [\omega]^{<\omega}$ eine Bijektion und definieren wir $nE_\beta m$ gdw $n \in \beta(m)$. Betrachten Sie die Struktur (ω, E_β).

   (a) Zeigen Sie: für $\beta(2^{n_1} + \cdots + 2^{n_k}) := \{n_1, \ldots, n_k\}$ ist (ω, E_β) fundiert.

   (b) Geben Sie ein β an, für das (ω, E_β) nicht das Fundierungsaxiom erfüllt.

   (c) Geben Sie ein β an, für das (ω, E_β) nicht fundiert ist, aber das Fundierungsaxiom erfüllt.

4. Sei $x \subseteq \omega \times \omega$. Wir fassen x als zweistellige Relation auf und definieren

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(x) &:= \{z \in \omega : \exists y \in \omega, \langle z, y \rangle \in x\} \\ \mathrm{rng}(x) &:= \{z \in \omega : \exists y \in \omega, \langle y, z \rangle \in x\}. \end{aligned}$$

   Bestimmen Sie $\{\alpha : \exists x \subseteq \omega \times \omega, (\alpha, \in) \cong (\mathrm{dom}(x) \cup \mathrm{rng}(x), x)\}$ und begründen Sie Ihre Antwort.