

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 10

Abgabe bis Montag 15.1.2018, 11:00 Uhr

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe 1: Sei \mathcal{L} eine prädikatenlogische Sprache, φ und ψ \mathcal{L} -Formeln und x, y Individuenvariablen. Zeigen Sie, dass die folgenden Formeln allgemeingültig sind, d. h. in jeder \mathcal{L} -Struktur und unter jeder Belegung gelten:

- (a) $(\forall x \varphi \leftrightarrow \varphi)$, wenn x nicht frei in φ vorkommt;
- (b) $(\exists x (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \wedge \exists x \psi))$;
- (c) $(\exists x \forall y \varphi(x, y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x, y))$.

Aufgabe 2: Finden Sie:

- (a) Ein Gegenbeispiel für (a) aus Aufgabe 1, wenn x frei in φ ist.
- (b) Eine \mathcal{L} -Struktur (für geeignetes \mathcal{L}) und eine \mathcal{L} -Formel φ , so dass die umgekehrte Implikation in (d) falsch ist.

Aufgabe 3: Sei $\mathcal{L} = \{c_0, s\}$ eine Sprache mit einem Konstantensymbol c_0 und einem einstelligen Funktionssymbol s . Sei ψ die Konjunktion der folgenden \mathcal{L} -Aussagen:

- $\forall x (\neg c_0 \doteq sx)$
- $\forall x \forall y (sx \doteq sy \rightarrow x \doteq y)$
- $\forall x (\neg x \doteq c_0 \rightarrow \exists y (x \doteq sy))$

- (a) Zeigen Sie, dass kein endliches \mathcal{L} -Modell von ψ existiert.
- (b) Finden Sie zwei unendliche \mathcal{L} -Modelle \mathfrak{A} und \mathfrak{B} von ψ , die nicht isomorph sind.

Isomorphie von \mathcal{L} -Strukturen ist im Skript im Abschnitt 2.2 definiert.