15.1.2018

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 11
Abgabe bis Montag 22.1.2018, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: Seien P und Q Prädikate. Beweisen Sie folgende Äquivalenzen durch Anwenden der elementaren Regeln aus Satz 2.4.2 (+ aussagenlogische Regeln):

(a) $$\exists v_0(Pv_0 \to Qv_0) \sim (\forall v_0\, Pv_0 \to \exists v_0\, Qv_0)$$

(b) $$\forall v_0\, \exists v_1\, \forall v_2\, ((Pv_0 \wedge Pv_1) \to Pv_2) \sim ((\forall v_0\, Pv_0 \wedge \exists v_1\, Pv_1) \to \forall v_2\, Pv_2)$$

(c) $$\forall v_1 \forall v_0\, \neg(Pv_0 \leftrightarrow Pv_1) \sim \neg(\forall v_0 \forall v_1 (Pv_0 \vee Pv_1) \to \exists v_0 \exists v_1\, (Pv_0 \wedge Pv_1))$$

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{U}$ eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur von $\mathcal{M}$ (Definition im Skript in § 2.2). Eine $\mathcal{L}$-Formel ψ heißt *einfach*, wenn keine Quantoren in ψ vorkommen, und eine $\mathcal{L}$-Aussage ϕ heißt *universell*, wenn ϕ der Form $\forall v_0 \ldots \forall v_k \psi$ ist mit einfachem ψ.

Zeigen Sie, dass für jede universelle $\mathcal{L}$-Aussage ϕ gilt:

$$\mathcal{M} \models \phi \Longrightarrow \mathcal{U} \models \phi.$$

Aufgabe 3: Eine Menge Γ von $\mathcal{L}$-Aussagen heißt *vollständig*, falls für jede $\mathcal{L}$-Aussage φ gilt, dass $\Gamma \models \varphi$ oder $\Gamma \models \neg\varphi$.

(a) Für eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{A}$ definieren wir $\mathbf{T}(\mathfrak{A}) := \{\varphi \mid \mathfrak{A} \models \varphi\}$.

Zeigen Sie, dass $\mathbf{T}(\mathfrak{A})$ vollständig ist.

(b) Sei $\mathcal{L} = \{E\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol E und Γ die Theorie der unendlichen trivalenten Graphen, d. h.

$$\begin{aligned}\Gamma = \big\{&\forall v_0 \neg E v_0 v_0,\ \forall v_0 \forall v_1 (E v_0 v_1 \leftrightarrow E v_1 v_0),\\ &\forall v_0 \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 (E v_0 v_1 \wedge E v_0 v_2 \wedge E v_0 v_3 \wedge \neg\, v_1 \doteq v_2 \wedge \neg\, v_2 \doteq v_3 \wedge \neg\, v_1 \doteq v_3\\ &\ \wedge \forall v_4 (E v_0 v_4 \rightarrow (v_4 \doteq v_1 \vee v_4 \doteq v_2 \vee v_4 \doteq v_3))),\\ &\exists v_0 \ldots \exists v_n \bigwedge_{i<j} \neg\, v_i \doteq v_j \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\}\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass Γ nicht vollständig ist.

(c) Bonusaufgabe: Zeigen Sie, dass die (analog zu (b) definierte) Theorie der trivalenten Graphen mit genau 4 Knoten vollständig ist.