22.1.2018

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 12
Abgabe bis Montag 29.1.2018, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: Sei $L = \{P, Q, R\}$ eine Sprache mit einstelligen Prädikatssymbolen P, Q und zweistelligem Prädikatssymbol R. Bringen Sie die folgende Formel zunächst in pränexe Normalform und anschließend in Skolem-Normalform und Herbrand-Normalform:

$$\forall v_1((Pv_1 \wedge \exists v_2(Qv_2 \wedge Rv_2v_1)) \to \exists v_2(Qv_2 \wedge \neg Rv_2v_1))$$

Aufgabe 2: Seien φ und ψ L-Formeln, wobei v_0 nicht frei in ψ vorkommt. Zeigen Sie:

(a) $\forall v_0(\varphi \to \psi) \;\sim\; (\exists v_0\varphi \to \psi)$

(b) $\forall v_0(\psi \to \varphi) \;\sim\; (\psi \to \forall v_0\varphi)$

(c) $\exists v_0(\varphi \to \psi) \;\sim\; (\forall v_0\varphi \to \psi)$

(d) $\exists v_0(\psi \to \varphi) \;\sim\; (\psi \to \exists v_0\varphi)$

(e) $\forall v_0(\psi \leftrightarrow \varphi) \;\not\sim\; (\psi \leftrightarrow \forall v_0\varphi)$

(f) $\exists v_0(\psi \leftrightarrow \varphi) \;\not\sim\; (\psi \leftrightarrow \exists v_0\varphi)$

Aufgabe 3: Sei $L =$ eine Sprache, die keine Funktionszeichen und Konstantenzeichen enthält und nur einstellige Relationszeichen. Es sollen in dieser Aufgabe nur Formeln betrachten werden, in denen das Gleichheitszeichen nicht vorkommt.

Zeigen Sie, dass jede solche L-Formel äquivalent zu einer Formel der Form

$$\bigvee_i \bigwedge_j (\neg)\exists v_{ij}((\neg)P_1^{ij}(v_{ij}) \wedge \cdots \wedge (\neg)P_{n_{ij}}^{ij}(v_{ij}))$$

ist, wobei die v_{ij} Individuenvariablen und die P_k^{ij} Prädikate in L sind und $(\neg)$ bedeutet, dass entweder ein Negationsjunktor an dieser Stelle steht oder nichts.

Bemerkung: Für Formeln in der angegebenen Form kann man testen, ob sie erfüllbar oder allgemeingültig sind.

Hinweis: Induktion über den Aufbau der Formeln. Arbeiten Sie mit dem vollständigen Junktoren-Quantoren-System $\{\neg, \vee, \exists\}$. Benutzen Sie folgende Ergebnisse:

- Falls v_i in χ nicht vorkommt, ist $\exists v_i(\psi \wedge \chi) \sim (\exists v_i \psi \wedge \chi)$
- Es gilt $\exists v_i \exists v_i \phi \sim \exists v_i \phi$
- Wegen der aussagenlogischen Distributivgesetze ist jede Formel der Form $\bigwedge_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} \phi_{ij}$ äquivalent zu einer Formel $\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in I} \phi_{ij}$ für ein geeignetes J.