29.1.2018

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 13 — Bonusblatt !!
Abgabe bis Montag 5.2.2018, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: Es sei c ein Konstantenzeichen, h ein- und f, g zweistellige Funktionszeichen. Unifizieren Sie, falls möglich, folgende Terme (unter Angabe des Unifikators):

(a) $gv_0ghcgv_2v_3$ und $gggv_5v_1hv_4ghcv_0$

(b) $gv_4ggfgv_1v_6fv_5v_{12}gfv_{10}cv_2fv_7v_8$ und $gffv_3v_9fv_{11}v_{11}ggv_2gfv_{10}cfv_6v_0v_4$

Aufgabe 2: Gegeben sei die Sprache $\mathcal{L} = \{P, c\}$, wobei P ein einstelliges Relationszeichen und c ein Konstantenzeichen ist.

(a) Zeigen Sie mit der Herbrand'schen Methode, daß die Aussage

$$\exists v_0\, (Pv_0 \to \forall v_0\, Pv_0)$$

allgemeingültig ist.

(b) Prüfen Sie mit der Herbrand'schen Methode, ob die Aussage

$$\exists v_1 \neg(\forall v_0 Pv_0 \to Pv_1)$$

allgemeingültig ist.

Aufgabe 3: **(a)** Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ mit einem zweistelligen Relationssymbol R und R die $\mathcal{L}$-Theorie der totalen (schwachen) Ordnung, d. h.

$$\begin{aligned} T = \{&\forall v_0 R v_0 v_0, \\ &\forall v_0 \forall v_1 (Rv_0v_1 \vee Rv_1v_0), \\ &\forall v_0 \forall v_1 ((Rv_0v_1 \wedge Rv_1v_0) \to v_0 \doteq v_1), \\ &\forall v_0 \forall v_1 \forall v_2 ((Rv_0v_1 \wedge Rv_1v_2) \to Rv_0v_2)\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass in jedem endlichen Modell von T die Aussage $\varphi := \exists v_0 \forall v_1 R v_0 v_1$ gilt, dass es aber unendliche Modelle von T gibt, in denen φ nicht gilt.

(b) Sei $\mathcal{L}$ eine beliebige Sprache. Zeigen Sie mittels des Kompaktheitssatzes der Prädikatenlogik: Wenn eine $\mathcal{L}$-Theorie T beliebig große endliche Modelle hat, in denen einen $\mathcal{L}$-Aussage φ gilt, dann gibt es ein unendliches Modell von T, in dem φ gilt.