13.11.2017

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 4
Abgabe bis Montag 20.11.2017, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: (4 Punkte) Verwenden Sie den Baumkalkül, um zu testen ob, die folgende Formel eine Tautologie ist:

$$\big(((A_0 \vee A_1) \wedge (\neg A_1 \vee A_2) \wedge (\neg A_2 \vee A_3)) \rightarrow (A_0 \vee A_3)\big).$$

Aufgabe 2: (4 Punkte) Sei $\mathcal{B} = (B, \sqcap, \sqcup, {}^c, 1, 0)$ eine boolesche Algebra. Sei die binäre Relation $\leq$ auf B definiert durch: Für $a, b \in B$

$$a \leq b \iff a \sqcup b = b,$$

(oder äquivalent, $a \leq b \iff a \sqcap b = a$).

Wir schreiben $a < b$ gdw $a \leq b$ und $a \neq b$. Ein $b \in B \setminus \{0\}$ heißt *Atom* gdw es kein $a \in B$ mit $0 < a < b$ gibt. Eine boolesche Algebra B heißt *atomar* gdw es für jedes $b \in B \setminus \{0\}$ ein Atom $a \leq b$ gibt.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Jede endliche boolesche Algebra ist atomar.

(b) Wenn eine endliche boolesche Algebra n Atome hat dann hat sie genau 2^n Elemente.

Aufgabe 3: (4 Punkte) Sei $F = F(A_0, \ldots, A_n)$ eine Formel, in der nur die Aussagenvariablen $A_0, \ldots, A_n$ vorkommen. Sei $F(\neg A_0, \ldots, \neg A_n)$ die Formel, die aus F hervorgeht, indem simultan alle Vorkommen von A_i in F durch $\neg A_i$ ersetzt werden.

Zeigen Sie per Induktion über den Aufbau von Formeln die *verallgemeinerten Regeln von De Morgan*, d.h. wenn F eine Formel ist, in der die Kunktoren $\to$ und $\leftrightarrow$ nicht vorkommen, so gilt

$$\neg F(A_0, \ldots, A_n) \sim F^*(\neg A_0, \ldots, \neg A_n).$$