11.12.2017

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 8
Abgabe bis Montag 18.12.2017, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: Seien F und G aussagenlogische Formeln. Bestimmen Sie, welches logische Verhältnis in jeder Zeile der folgenden Tabelle zwischen der linken Aussage und der rechten Aussage in der klassischen Logik gilt. Die Möglichkeiten sind (in Klammer eine verkürzte Schreibweise für die Tabelle):

- Die beiden Aussagen sind äquivalent ("$\Leftrightarrow$");
- die linke Aussage impliziert die rechte, aber nicht umgekehrt ("$\Rightarrow$");
- die rechte Aussage impliziert die linke, aber nicht umgekehrt ("$\Leftarrow$");
- keine Aussage impliziert die andere ("—").

$\neg F$ ist eine Tautologie.		F ist keine Tautologie.
$(F \wedge G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie und G ist eine Tautologie.
$(F \vee G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie oder G ist eine Tautologie.
$(F \to G)$ ist eine Tautologie.		Wenn F eine Tautologie ist, dann ist G eine Tautologie.
$(F \leftrightarrow G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie gdw G eine Tautologie ist.
$\neg F$ ist erfüllbar.		F ist nicht erfüllbar.
$(F \wedge G)$ ist erfüllbar.		F ist erfüllbar und G ist erfüllbar.
$(F \vee G)$ ist erfüllbar.		F ist erfüllbar oder G ist erfüllbar.
$(F \to G)$ ist erfüllbar.		Wenn F erfüllbar ist, dann ist G erfüllbar.
$(F \leftrightarrow G)$ ist erfüllbar.		F ist genau dann erfüllbar, wenn G erfüllbar ist.

Aufgabe 2: Zeigen Sie: $(\neg A_0 \vee \neg A_1) \vdash_{\text{int}} \neg(A_0 \wedge A_1)$, aber die Umkehrung gilt nicht, d. h. die logische Folgerung zwischen den beiden Formeln gilt auch intuitionistisch, nicht aber die umgekehrte Folgerung.

Bonusaufgabe:

Zeigen Sie $\neg(A_0 \vee A_1) \sim_{\text{int}} (\neg A_0 \wedge \neg A_1)$.

Aufgabe 3: Sei $n \geq 2$ und $F_n = F_n(A_0, \ldots, A_{n-1})$ die aussagenlogische Formel in KNF, die durch folgende Klauselmenge $\mathcal{C}_n$ beschrieben wird:

$$\big\{ \{A_0, \neg A_1\}, \{A_0, \neg A_2\}, \ldots, \{A_0, \neg A_{n-1}\}, \{A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}\} \big\}$$

- Zeigen Sie für alle $n \geqslant 2$, dass F_n erfüllbar ist.
- Berechnen Sie die Länge von F_n in Abhängigkeit von n und zeigen Sie, dass sie durch ein Polynom in n beschränkt ist.
- Zeigen Sie, dass die Anzahl r_n aller Resolventen, die man sukzessive aus $\mathcal{C}_n$ bilden kann, mindestens exponentiell in n wächst (d. h. es gibt $r \in \mathbb{R}, r > 1$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $r_n \geqslant r^n$ für alle $n \geqslant n_0$.)

Daraus folgt dann, dass r_n nicht durch ein Polynom in der Länge von F_n beschränkt ist, die Resolutionsmethode für diese Formeln also nicht in polynomieller Zeit ein Ergebnis liefert.