18.12.2017

PD Dr. Markus Junker
Dr. Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik für Informatiker

WS 2017-2018, Blatt 9
Abgabe bis Montag 8.1.2018, 11:00 Uhr

Name, Vorname: ....
Matrikelnummer: ....
Übungsgruppe: ....

Aufgabe 1: Sei $\mathcal{L} = \{R_0, R_1, R_2, c_0\}$ mit dreistelligem Relationssymbol R_0, zweistelligem Relationssymbol R_1, einstelligem Relationssymbol R_2 und Konstante (= nullstelligem Funktionssymbol) c_0. Entscheiden Sie,

(a) welche der folgenden Zeichenreihen $\mathcal{L}$-Formeln und
(b) welche der folgenden Zeichenreihen $\mathcal{L}$-Aussagen sind.

$\exists v_1 \, \forall v_1 \, R_2 v_1$

$\forall c_0 \, R_0 c_0$

$\forall c_0 \, R_0 c_0 c_0 c_0$

$\forall v_1 \, R_0 v_1 v_1 v_1$

$(R_1 c_0 c_0 \to R_0 v_0 v_1 c_0 c_0)$

$(\exists v_1 \, \neg R_2 v_1 \to \forall v_2 \, R_0 v_2 c_0 v_1)$

$\exists v_1 \, (\neg R_2 v_1 \to \forall v_2 \, R_0 v_2 c_0 v_1)$

$(\forall v_2 \, R_0 c_0 v_1 \to (R_2 v_2 \wedge R_1 v_2 c_0))$

$\forall v_0 \, R_1 v_0 R_2 v_0$

$(\forall v_2 \, R_2 v_2 \to \neg R_2 v_1)$

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 2: Sei $\mathcal{L} = \{R\}$ für ein zweistelliges Relationssymbol R und M die Menge aller Menschen. Weiterhin sei $\mathfrak{M}$ die $\mathcal{L}$-Struktur mit Universum M, in der R durch die „befreundet-sein-Relation“ interpretiert wird, d. h. $R^{\mathfrak{M}}ab$ gilt für $a, b \in M$, wenn a und b befreundet sind. Formalisieren Sie als $\mathcal{L}$-Aussagen:

(a) Jeder Mensch hat mindestens zwei Freunde.

(b) Niemand ist mit jedem befreundet.

(c) Keine zwei Menschen haben genau die gleichen Freunde.

(d) Je drei Freunde haben einen gemeinsamen vierten Freund.

Hinweis: Verschiedene Individuenvariablen werden nicht automatisch in einer Struktur durch verschiedene Elemente interpretiert; wenn dies so sein soll, muss man es explizit ausdrücken.

Aufgabe 3: *entfällt als Weihnachtsgeschenk!*

Bonusaufgabe 1: Es sei $\mathcal{L} = \{P, Q\}$ mit einstelligen Relationssymbolen P, Q. Betrachten Sie die $\mathcal{L}$-Formel φ mit

$$\varphi \quad = \quad ((\exists v_0 P v_0 \wedge \exists v_0 Q v_0) \rightarrow \exists v_0 (P v_0 \wedge Q v_0))$$

Geben Sie eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathfrak{M}$ an, in der φ nicht gilt.

(*Bemerkung: In der Vorlesung haben wir noch nicht definiert, was es heißt, dass eine $\mathcal{L}$-Aussage in einer $\mathcal{L}$-Struktur gilt. Sie müssen also etwas vorarbeiten. Allerdings entspricht die Gültigkeit einer Aussage in einer Struktur bei Aussagen überschaubarer Kopmplexität wie bei φ dem „intuitiven mathematischen Verständnis“.*)

Bonusaufgabe 2: Lösen Sie von Aufgabe 1 von Blatt 7 die obere Tabellenhälfte, dieses Mal aber für die intuitionistische Logik. „Tautologie“ ist also nun als „intuitionistische Tautologie“ verstanden.

$\neg F$ ist eine Tautologie.		F ist keine Tautologie.
$(F \wedge G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie und G ist eine Tautologie.
$(F \vee G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie oder G ist eine Tautologie.
$(F \rightarrow G)$ ist eine Tautologie.		Wenn F eine Tautologie ist, dann ist G eine Tautologie.
$(F \leftrightarrow G)$ ist eine Tautologie.		F ist eine Tautologie gdw G eine Tautologie ist.