Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 10

Abgabe bis 21.7.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Übung 1. (4 Punkte) Sei $p, q, r, s \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass $\langle p \times q, r \times s \rangle = \langle p, r \rangle \cdot \langle q, s \rangle - \langle p, s \rangle \cdot \langle q, r \rangle$.

Übung 2. (4 Punkte) Sei d_S die Abstandsfunktion auf $\mathbb{S}^2 := \{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ wie in der Vorlesung definiert.

Gegeben die Punkte $p = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0)$, $q = (0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ und $r = (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})$, betrachten Sie das Dreieck Δpqr. Berechnen Sie $d_S(p, q) + d_s(q, r) + d_S(p, r)$ und $\alpha + \beta + \gamma$, wobei α, β, γ die Innere Winkeln des Dreieck Δpqr sind.

Übung 3. (2+2 Punkte) Man definiert die *stereographische Projektion* $\phi : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{C}^+$ sowie die Abbildung $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ wie folgt:

$$\phi(x, y, z) = \begin{cases} \frac{x}{1-z} + \mathrm{i}\frac{y}{1-z} & \text{if } z \neq 1, \\ \infty & \text{if } z = 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f(z) = \begin{cases} -\frac{1}{\bar{z}} & \text{wenn } z \neq 0, \infty, \\ \infty & \text{wenn } z = 0, \\ 0 & \text{wenn } z = \infty. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Für jede antipodale Punkte $p, q \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$, gilt $\phi(p) \cdot \overline{\phi(q)} = -1$. Was passiert, wenn $p = (0, 0, 1)$ oder $p = (0, 0, -1)$?

(b) Sei C eine Cline mit der Eigenschaft: Es gibt ein $z \in C$, so dass $f(z) \in C$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall $\forall z \in C \ f(z) \in C$ gilt.

Übung 4. (4 Punkte) Sei $\sigma : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ durch $\sigma(x, y, z) = (x, y, -z)$ gegeben. Sei ferner $K \subset \mathbb{C}$ der Einheitskreis mit dem Mittelpunkt 0.

Zeigen Sie: Für jedes $p \in \mathbb{S}^2$, man hat $I_K(\phi(p)) = \phi(\sigma(p))$.