Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 2

Abgabe bis 25.5.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Übung 1. (2+2 Punkte)

(a) Finden Sie (und beschreiben Sie) alle nicht-isomorphen Inzidenzgeometrien mit 6 Punkten.

(b) Beschreiben Sie eine 9-punktige Inzidenzebene mit der folgenden Eigenschaft: Auf jeder Geraden liegen genau drei Punkte.

Übung 2. (4 Punkte) Wir definieren die *Moulton-Ebene* $\mathbb{M}$ wie folgt: $\mathbb{R}^2$ ist die Menge von Punkten und die Geraden sind von der Form $x = a$ (mit $a \in \mathbb{R}$ Konstante) oder $y = m \circ x + b$, für $m, b \in \mathbb{R}$, wobei $m \circ x$ definiert ist durch

$$m \circ x := \begin{cases} mx & \text{wenn } m \leq 0 \text{ oder } x \leq 0, \\ 2mx & \text{wenn } m > 0 \text{ und } x > 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{M}$ eine Inzidenzebene ist.

Übung 3. (4 Punkte) Sei $\mathscr{I} = (P, G, I)$ eine endliche Inzidenzgeometrie. Zeigen Sie, dass $|G| \geq |P|$, d.h. die Mächtigkeit von G ist grösser oder gleich wie die Mächtigkeit von P.

Übung 4. (4 Punkte) Seien P, G, Π Mengen, $I \subseteq P \times G$ und $J \subseteq G \times \Pi$, dann heißt $\mathscr{K} := (P, G, I, J)$ eine K-Struktur.

Eine K-Geometrie wird durch eine K-Struktur $\mathscr{K} := (P, G, I, J)$ gegeben, welche die Axiome (K1)-(K5) erfüllt:

(K1) Für jede zwei verschiedene Punkte p, q gibt es genau eine $g \in G$, so dass $(p, g) \in I$ und $(q, g) \in I$;

(K2) Alle Geraden $g \in G$ besitzen die gleiche Anzahl an Punkten.

(K3) Es gibt drei nicht kollinear Punkte.

(K4) Für jedes $g \in G$ gibt es genau ein $\pi \in \Pi$, sodass $(g, \pi) \in \Pi$.

(K5) Für jedes $\pi \in \Pi$ und jede $p \in P$ gibt es genau ein $g \in G$, sodass $(g, \pi) \in \Pi$ und $(p, g) \in G$.

(a) Zeigen Sie, dass jede affine Ebene [1] eine K-Geometrie ist.

(b) Finden Sie eine K-Geometrie mit 15 Punkten (d.h. $|P| = 15$), $|\Pi|$=7 und so, dass jede Gerade $g \in G$ genau drei Punkte hat.

[1] Eine Inzidenzgeometrie heißt affine Ebene, wenn das folgende Axiome erfüllt ist: (PE) Für jede Gerade $g \in G$ und jedes $p \in P$ (mit $(p, g) \notin I$) gibt es genau ein $h \in G$, sodass $(p, h) \in I$ und $g \cap h = \emptyset$.