Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 3

Abgabe bis 1.6.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Für alle $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p = (p_1, p_2)$ und $q = (q_1, q_2)$, betrachten wir die Funktionen $d_i \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, wobei:

- $d_0(p, q) = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}$
- $d_1(p, q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|$
- $d_2(p, q) = \sup\{|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|\}$
- $$d_3(p, q) = \begin{cases} d_0(p, q), & \text{falls die Gerade durch } p \text{ und } q \text{ waagerecht oder senkrecht ist,} \\ 2d_0(p, q), & \text{solst.} \end{cases}$$

Dann definiert man für jedes $i = 0, 1, 2, 3$ und alle $p, q, p', q' \in \mathbb{R}^2$: $\overline{pq} \cong_i \overline{p'q'}$ gdw. $d_i(p, q) = d_i(p', q')$.

Übung 1. (2+2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\cong_2$ und $\cong_3$ die Axiome $(K1)$, $(K2)$, $(K3)$ erfüllen. (Für $\cong_0$ und $\cong_1$, siehe Vorlesung 3.)

Übung 2. (4 Punkte) Gegeben drei nicht kollineare Punkte $p, q, r \in \mathbb{R}^2$.

(a) Ist immer $d_0(p, q) \leq d_0(q, r) + d_0(p, r)$? Begründen Sie die Antwort.
(b) Ist immer $d_1(p, q) \leq d_1(q, r) + d_1(p, r)$? Begründen Sie die Antwort.
(c) Ist immer $d_2(p, q) \leq d_2(q, r) + d_2(p, r)$? Begründen Sie die Antwort.
(d) Ist immer $d_3(p, q) \leq d_3(q, r) + d_3(p, r)$? Begründen Sie die Antwort.
(e) (Bonus) Welche d_i erzeugen eine metrische Topologie?

Übung 3. (2+2 Punkte) Gegeben zwei angeordnete Inzidenzgeometrien $M = (P, G, I, A, \cong)$ und $M' = (P', G', I', A', \cong')$, sodass $\cong, \cong'$ die Kongruenzaxiome $(K1)$, $(K2)$, $(K3)$ erfüllen. Ein Paar von Abbildungen $(\sigma, \tau) : M \to M'$ mit $\sigma : P \to P'$ und $\tau : G \to G'$ heißt ein *Isomorphismus zwischen M und M'*, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

i. σ, τ sind Bijektionen;
ii. für alle $p \in P$, $g \in G$: $(p, g) \in I$ gdw. $(\sigma(p), \tau(g)) \in I'$;
iii. für alle $p, q, r \in P$: $(p, q, r) \in A$ gdw. $(\sigma(p), \sigma(q), \sigma(r)) \in A'$;
iv. für alle $p, q, r, s \in P$: $\overline{pq} \cong \overline{rs}$ gdw. $\overline{\sigma(p)\sigma(q)} \cong' \overline{\sigma(r)\sigma(s)}$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \cong_1)$ und $(\mathbb{R}^2, \cong_2)$ isomorph sind.
(b) Ist $(\mathbb{R}^2, \cong_1)$ isomorph zu $(\mathbb{R}^2, \cong_0)$? Ist $(\mathbb{R}^2, \cong_2)$ isomorph zu $(\mathbb{R}^2, \cong_0)$? Begründen Sie die Antworten.

Bitte wenden

Übung 4. (4 Punkte) Auf $\mathbb{R}^2$ definiert man wie in Vorlesung 3 eine Äquivalenzrelation auf Winkeln wie folgt:

$$\sphericalangle pqr \cong_w \sphericalangle p'q'r' \text{ gdw. } \arccos\frac{\langle p-q, r-q\rangle}{d_0(p,q)\cdot d_0(r,q)} = \arccos\frac{\langle p'-q', r'-q'\rangle}{d_0(p',q')\cdot d_0(r',q')},$$

wobei $\langle (p_1,p_2),(q_1,q_2)\rangle := p_1q_1 + p_2q_2$ das euklidische Skalarprodukt ist.

Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2, \cong_1, \cong_w)$ und $(\mathbb{R}^2, \cong_2, \cong_w)$ das Axiom $(K6)$ nicht erfüllen.