Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 4

Abgabe bis 8.6.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Wir betrachten das folgende Axiom:

(P) Für jede Gerade $g \in G$ und jedes $p \in P$ (mit $(p, g) \notin I$) gibt es höchstens ein $h \in G$, sodass $(p, h) \in I$ und $g \cap h = \emptyset$.

Übung 1. (4 Punkte)
Sei $P := \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}$, wobei $\mathbb{R}_{>0} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Wir definieren:

Für alle $b \in \mathbb{R}$, $g_b := \{(b, y) \in P : y > 0\}$.
Für alle $x_0, r \in \mathbb{R}$, $h_{x_0,r} := \{(x, y) \in P : (x - x_0)^2 + y^2 = r^2, y > 0\}$.

Dann sei $G := \{g_b : b \in \mathbb{R}\} \cup \{h_{x_0,r} : x_0 \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass (P, G, I) eine Inzidenz**geometrie** ist.
(b) Ist (P) in (P, G, I) erfüllt? Begründen Sie die Antwort.
(c) Was ändert sich, wenn man $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ betrachtet (und dementsprechend $y \leq 0$ in den obigen Definitionen auch erlaubt)?

Übung 2. (4 Punkte)
Sei H eine angeordnete Inzidenzgeometrie, so dass die Axiome (K1)-(K6) erfüllt sind (H heißt eine *Hilbertebene*).

Sei $\{a_0, a_1, \dots, a_n\}$ eine endliche Menge von Punkten in H. Zeigen Sie, dass es eine gerade g gibt, sodass alle $a_0, a_1, \dots a_n$ auf derselben Seite von g liegen.

Übung 3. (4 Punkte)
Gegeben sei ein Winkel $\sphericalangle pqr$ und ein Punkt s, der im Inneren des Winkels $\sphericalangle pqr$ liegt. Betrachten Sie p', q', r', s', sodass $\sphericalangle s'q'p' \cong \sphericalangle sqp$, $\sphericalangle r'q's' \cong \sphericalangle rqs$ und $s' \in \mathrm{Inn}(\sphericalangle p'q'r')$. Zeigen Sie, dass $\sphericalangle r'q'p' \cong \sphericalangle rqp$.

Übung 4. (4 Punkte)
In eine Hilbertebene H betrachten wir K und K' zwei Kreise, die sich in einem Punkt a tangieren, d.h. $K \cap K' = \{a\}$.

Zeigen Sie, dass K vollständig innerhalb von K' oder K vollständig außerhalb von K' liegt (mit Ausnahme des Punktes a).