Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 5

Abgabe bis 15.6.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Übung 1. (4 Punkte)
Sei H eine Hilbertebene, sodass (P) erfüllt ist. Gegeben zwei Punkte q und q', bezeichne $g(q,q')$ die Gerade durch q und q'.

Betrachten Sie einen Kreis K in H mit Mittelpunkt p und einen Punkt $p_0 \in K$. Zeigen Sie, dass es für alle Punkte q, q' mit $\overline{pq}, \overline{pq}' > \overline{pp}_0$ ein $q'' \in H$ gibt, sodass $g(q,q'') \cap K = \emptyset$ und $g(q',q'') \cap K = \emptyset$.

Übung 2. (4 Punkte)
Seien $\{(X_n, d_n) : n \in \mathbb{N}\}$ metrische Räume und man betrachte das unendliche kartesische Produkt der X_n, also $X := \prod_{n=0}^{\infty} X_n$. Wir schreiben $x := \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ für ein Element aus X (d.h. x_n ist die n-te Komponente von x). Man definiert $d : X \times X \to \mathbb{R}$ wie folgt:

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Abstandsfunktion ist.

Übung 3. (4 Punkte)
Sei H eine Hilbertebene. Zeigen Sie, dass die Dreiecksungleichung in H gilt, d.h. für je drei nichtkollineare Punkte $p, q, r \in H$ gilt die Ungleichung $\overline{pq} + \overline{qr} > \overline{pr}$.

Übung 4. (4 Punkte)
Wir betrachten das folgende Axiom:

(D) (Dedekind-Axiom) Sei g eine Gerade und $S \neq \emptyset$ und $T \neq \emptyset$ zwei Teilmengen von g mit den Eigenschaften: $g = S \cup T$, kein Punkt aus S liegt zwischen zwei Punkten aus T und kein Punkt aus T liegt zwischen zwei Punkten aus S. Dann gibt es einen einzigen Punkt p, sodass für alle $s \in S$ und alle $t \in T$ das Folgende gilt: ($s = p$) oder ($t = p$) oder (p liegt zwischen s und t).

Zeigen Sie: In jeder Hilbertebene gilt: (D) impliziert (KK).

Bonusaufgabe: In jeder Hilbertebene H gilt: (D) impliziert, dass H isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist.