Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 6

Abgabe bis 22.6.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Übung 1. (4 Punkte)
Betrachten Sie $\mathbb{R}^2$ als Euklidische Ebene (d.h. die Kartesische Ebene mit der üblichen euklidischen Geometrie). Betrachten Sie eine Translation $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) := p + c$, mit $c \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie (unter Ausnutzung der Definition von $\sphericalangle$, den Eigenschaften des Skalarproduktes und der Definition der Kongruenz von Winkeln):

- $\forall p, q \in \mathbb{R}^2, \overline{pq} \cong \overline{\varphi(p)\varphi(q)}$.
- $\forall p, q, r \in \mathbb{R}^2, \sphericalangle pqr \cong \sphericalangle \varphi(q)\varphi(q)\varphi(r)$.

Übung 2. (4 Punkte)
Sei g bzw. h eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, die durch die Gleichung $2x + y = 3$ bzw $-2x - y = 3$ gegeben ist. Finden Sie $\sigma_g \circ \sigma_h$, wobei σ_g (bzw σ_h) die Spiegelung in g (bzw. h) ist.

Übung 3. (4 Punkte)
Eine Abbildung r_p heißt eine Rotation (Drehung) um den Punkt p, wenn

- $r_p = id$ (Rotation um $0°$) oder
- $(s,\, p,\, r_p(s)) \in \mathscr{A}$ für alle Punkte $s \neq p$ und $\overline{ps} \cong \overline{p\, r_p(s)}$ (Rotation um $180°$) oder
- für alle Punkte $s \neq p$ und $t \neq p$ gilt: $\sphericalangle s\, p\, r_p(s) \cong \sphericalangle\, t\, p\, r_p(t)$ und $\overline{sp} \cong \overline{p\, r_p(s)}$ (und $\overline{tp} \cong \overline{p\, r_p(t)}$).

Gegeben einen beliebigen Punkt $p \in \mathbb{R}^2$ und eine beliebige Rotation r_p um p. Finden Sie zwei Geraden g, g', sodass $r_p = \sigma_g \circ \sigma_{g'}$, wobei σ_g (bzw $\sigma_{g'}$) die Spiegelung in g (bzw. g') ist.

Übung 4. (2+2 Punkte)

(a) Sei ψ eine Isometrie, sodass es drei nicht kollineare Punkte $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ gibt, mit $\psi(a) = a$, $\psi(b) = b$ und $\psi(c) = c$. Zeigen Sie, dass ψ die Identität ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Isometrie der euklidischen Ebene die Komposition von höchstens 3 Spiegelungen ist.