Mathematisches Institut
Andriy Haydys
Giorgio Laguzzi

Elementargeometrie
Sommersemester 2020

Übungsblatt 9

Abgabe bis 14.7.2020, 12:00 per E-Mail an Ihren Tutor

Übung 1. (2+2 Punkte) Sei $\mathbb{H}$ die hyperbolische Halbebene. Man definiert $d_{\mathbb{H}}(p,q) := |\ln(p,q,p',q')|$, wenn $p \neq q$, und $d_{\mathbb{H}}(p,p) = 0$ (s. Vorlesung).

(a) Sei eine $\mathbb{H}$-Gerade g sowie drei Punkte p, q, r auf g gegeben, so dass q zwischen p und r liegt. Zeigen Sie, dass $d_{\mathbb{H}}(p,q) + d_{\mathbb{H}}(q,r) = d_{\mathbb{H}}(p,r)$.

(b) (Geraden sind unendlich lang) Seien $g_b := \{c(t) := b + \mathrm{i}t : t \in (0,\infty)\}$ und $h_{x_0,r} := \{c(t) := x_0 + r\cos t + \mathrm{i}r\sin t : t \in (0,\pi)\}$. Zeigen Sie:

- Für $c(s) \in g_b$ fest, $\lim_{t\to\infty} d_{\mathbb{H}}(c(t),c(s)) = \lim_{t\to 0} d_{\mathbb{H}}(c(t),c(s)) = \infty$
- Für $c(s) \in h_{x_0,r}$ fest, $\lim_{t\to 0} d_{\mathbb{H}}(c(t),c(s)) = \lim_{t\to\pi} d_{\mathbb{H}}(c(t),c(s)) = \infty$.

Übung 2. (4 Punkte) Sei $\mathbb{C}^+ := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Betrachten Sie $T : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^+$ so dass $T(z) := \frac{az+b}{cz+d}$, wobei a, b, c, d komplexe Zahlen mit $ad - bc \neq 0$ (T heißt *Möbiustransformation*).

Zeigen Sie: Wenn $T \neq id$, dann hat T höchstens zwei Fixpunkte.

(*Bemerkung*: Möbiustransformationen sind dadurch wichtig, dass sie eine (große) Klasse der Bewegungen im $\mathbb{H}$ darstellen; siehe auch Übung 4.)

Übung 3. (4 Punkte)

(Hyp. Satz von Pythagoras) Sei Δpqr ein P-Dreieck, mit $\sphericalangle pqr \cong R$ und $p = 0$. Zeigen Sie, dass $\cosh pr = \cosh pq \cdot \cosh qr$.

(*Hinweis:* Als erste Schritt zeigen Sie das Folgende: Für $p = 0$, $q \in \mathbb{D}$, $q \neq p$, $x := d_{\mathbb{D}}(p,q)$ und $t := d(p,q)$, wobei d die euklidesche Standardmetrik ist, $\sinh x = \frac{2t}{1-t^2}$, $\cosh x = \frac{1+t^2}{1-t^2}$ und $\tanh x = \frac{2t}{1+t^2}$ gelten.)

Übung 4. (4 Punkte) Sei T eine Möbiustransformation so dass $T[\mathbb{D}] = \mathbb{D}$.

Zeigen Sie, dass es zwei P-Spielegungen σ_g, σ_h gibt, so dass $T = \sigma_g \circ \sigma_h$.

(*Hinweis:* Betrachten Sie zunächst den Fall $T(0) = 0$ und dann die Sonderfälle. Außerdem können Sie die folgenden zwei Eigenshaften von Möbiustransformationen verwenden: 1) Kompositionen von Möbiustransformationen sind auch Möbiustransformationen; 2) Jede Möbiustransformation lässt sich als eine Komposition von $2n$ Inversionen darstellen, wobei $n \in \mathbb{N}$.)