

**Mathematische Logik**  
Sommersemester 2020  
Übungsblatt 1, 12.5.2020

Abgabe spätestens am 19.5.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:  
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de <sup>1</sup>

1. Sei  $S = \{0, 1, \boxplus, \circ, P, \triangleleft\}$ ; dabei seien  $0, 1$  Konstantenzeichen,  $\boxplus, \circ$  zweistellige Funktionszeichen und  $P$  ein einstelliges und  $\triangleleft$  ein zweistelliges Relationszeichen. Wir betrachten die natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  als  $S$ -Struktur  $\mathfrak{N}$ , indem wir die Zeichen wie folgt interpretieren:

$$0^{\mathfrak{N}} = 0, 1^{\mathfrak{N}} = 1, \boxplus^{\mathfrak{N}} = +, \circ^{\mathfrak{N}} = \cdot, P^{\mathfrak{N}} = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ ist Primzahl}\}, \triangleleft^{\mathfrak{N}} = <$$

Drücken Sie folgende Aussagen als  $S$ -Formeln aus:

- Nicht alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen.
  - Zu jeder Primzahl gibt es eine größere.
  - Es gibt unendlich viele Primzahlen.
  - Es gibt genau eine gerade Primzahl.
- Gilt  $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w (z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w)$ ?
  - Gilt  $\mathfrak{N} \models \forall x \forall y \exists z \exists v \exists w ((z = x \boxplus v \wedge y = z \boxplus w) \vee (z = y \boxplus w \wedge x = z \boxplus w))$  ?

2. Wir definieren die Menge der  $K$ -Terme über  $\{[, ]\}$  durch folgende Regeln:

- Das Wort  $[ ]$  ist ein  $K$ -Term.
  - Falls  $v, w$   $K$ -Terme sind, so ist  $[vw]$  ein  $K$ -Term.
- Ist das Wort  $[ ][ ]$  ein  $K$ -Term? Begründen Sie Ihre Antwort.
  - Wir definieren  $F$ : Menge der  $K$ -Terme  $\rightarrow \mathbb{N}$  durch folgende Regeln:

$$F([ ]) := 1 \\ F([vw]) := 1 + \max\{F(v), F(w)\}.$$

Ist die Funktion  $F$  wohldefiniert?

*Bitte wenden.*

---

<sup>1</sup>Leider war diese Adresse in der Begrüßungsmail vom 9.5.2020 falsch geschrieben.

3. Seien  $\mathfrak{A}$  eine  $L$ -Struktur und  $B$  eine nicht leere Teilmenge von  $A$ . Die Menge  $B$  enthalte die Interpretationen  $c^{\mathfrak{A}}$  aller Konstanten und sei unter allen Funktionen  $f^{\mathfrak{A}}$  abgeschlossen. Wenn man die Interpretation der Zeichen aus  $L$  auf  $B$  einschränkt, erhält man eine  $L$ -Struktur  $\mathfrak{B}$ . Die  $L$ -Struktur  $\mathfrak{B}$  heißt eine *Unterstruktur von  $\mathfrak{A}$* .

(a) Ist der Durchschnitt einer Familie von Unterstrukturen von  $\mathfrak{A}$ , falls er nicht leer ist, wieder eine Unterstruktur?

Aus einer positiven Antwort würde folgen, dass jede nicht leere Teilmenge  $S$  von  $A$  in einer kleinsten Unterstruktur von  $\mathfrak{A}$  (als Teilmenge) enthalten ist, der *von  $S$  erzeugten* Unterstruktur.

(b) Kann man das gleiche über die Vereinigung sagen? Beweisen Sie die analogen Aussagen oder geben Sie ein Gegenbeispiel.

4. Sei die *lexikographische Ordnung* auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  definiert durch

$$(n, m) <_{\text{lex}} (n', m'), \text{ wenn } n < n' \text{ oder } (n = n' \text{ und } m < m').$$

(a) Ist  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{lex}})$  eine lineare Ordnung?

(b) Lesen Sie die Definition der Isomorphierelation  $\cong$  im Skript. Ist  $(\mathbb{N}, <) \cong (\mathbb{N} \times \mathbb{N}, <_{\text{lex}})$ ?

(c) Gibt es eine Ordnung  $\triangleleft$  auf  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , so dass  $(\mathbb{N}, <)$  und  $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \triangleleft)$  isomorphe  $L$ -Strukturen sind? Falls Sie bejahen, geben Sie bitte eine Ordnung an.