Abteilung für Mathematische Logik
Heike Mildenberger
Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2020

Übungsblatt 2, 19.5.2020

Abgabe spätestens am 26.5.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de

1. (a) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?

(b) Ist $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ elementar äquivalent zu $(\mathbb{Q}, +, \cdot, 0, 1)$?

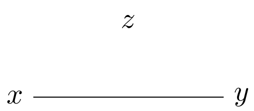
(c) Ist $(\mathbb{Z}, +)$ isomorph zu $(\mathbb{Q}, +)$?

(d) Sind $(\mathbb{R}, \leq)$ und $(\mathbb{Q}, \leq)$ elementar äquivalent?

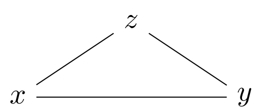
Begründen Sie die Antworten.

2. Ein Graph (V, E) ist eine nichtleere Menge V von *Punkten* zusammen mit einer Menge E, welche aus 2-elementigen Teilmengen von V (oder *Kanten*) besteht. Ein Teilgraph von (V, E) ist ein Graph (V', E') derart, dass $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$. Jeder Graph kann als Struktur in der Sprache mit einem zweistelligen Relationszeichen R betrachtet werden.

- Zeigen Sie, dass jede Unterstruktur (in der Graphensprache) eines Graphen ein Teilgraph ist.
- Ist $\mathfrak{A}$ ein Teilgraph von $\mathfrak{B}$? Ist $\mathfrak{A}$ eine Substruktur von $\mathfrak{B}$?



$\mathfrak{A}$



$\mathfrak{B}$

3. Ein Automorphismus ist ein Isomorphismus einer Struktur in sich selbst.

(a) Wir betrachten $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Relationszeichen P.
Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0\})$, also $P^{\mathfrak{A}} = \{0\}$. Wieviele Automorphismen hat $\mathfrak{A}$? Wie viele zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

(b) Sei immer noch $L = \{P\}$ mit einem einstelligen Prädikatenzeichen P.
Sei $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, \{0, 1, 2\})$. Wie viele Automorphismen hat $\mathfrak{A}$? Wie viele zu $\mathfrak{A}$ isomorphe Strukturen gibt es auf $\{0, 1, 2, 3, 4\}$?

(c) Sei L nun beliebig, und sei A endlich. Sei $\mathfrak{A}$ eine L-Struktur. Wie hängt die Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$ mit der Anzahl der zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Strukturen auf A zusammen? Können Sie eine Formel erraten und danach ihre Richtigkeit beweisen?

Bitte wenden.

4. Sei $L = \{c, f\}$ eine Sprache mit einem Konstantensymbol c und einem einstelligen Funktionssymbol f. Sei T die Menge, die durch die folgenden Aussagen gebildet wird:

- $\forall x \neg c = fx$.
- $\forall x \forall y (fx = fy \to x = y)$.
- $\forall x (\neg x = c \to \exists y x = fy)$.

(a) Gibt es eines endliches L-Modell für T?

(b) Finden Sie L-Modelle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von T, so dass

$$\{(z, z+1) : z \in \mathbb{Z}\} \subseteq f^{\mathfrak{A}} \text{ und}$$

$$\{(z, z+1) : z \in \mathbb{Z}\} \not\subseteq f^{\mathfrak{B}}.$$

Hierbei sind die Funktionen jeweils mit ihren Graphen identifiziert.

(c) Finden Sie zwei L-Modelle $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ für T, die nicht isomorph sind.