

**Mathematische Logik**  
Sommersemester 2020  
Übungsblatt 3, 26.5.2020

Abgabe spätestens am 2.6.2020 um 12:00 Uhr als pdf-Datei per E-Mail an:  
hannes.jakob@pluto.uni-freiburg.de

**1.** (8 Punkte)

Alle Variablen in dieser Aufgabe stehen für aussagenlogische Variablen. Seien  $g_i$  Konjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigvee_{i=0}^{N-1} g_i$$

heißt Formel in *disjunktiver Normalform*.

Seien  $h_i$  Disjunktionen von Variablen und negierten Variablen. Eine Formel der Form

$$\bigwedge_{i=0}^{N-1} h_i$$

heißt Formel in *konjunktiver Normalform*.

Ist jede aussagenlogische Formel  $\varphi$  zu einer Formel in disjunktiver Normalform  $\bigvee_{i=0}^{N-1} g_i$  äquivalent?

*Hinweis:* Seien  $A_0, \dots, A_{n-1}$  die Aussagenvariablen in  $\varphi$ . Wir setzen für  $j < n$ ,  $A_j^W = A_j$  und  $A_j^F = \neg A_j$ . Wir schreiben  $\mu$  auch für die Fortsetzung  $\bar{\mu}$ . Ist dann

$$\varphi \leftrightarrow \bigvee_{\{\mu: \{A_0, \dots, A_{n-1}\} \rightarrow \{W, F\} : \mu(\varphi) = W\}} \bigwedge_{j < n} A_j^{\mu(A_j)}$$

eine aussagenlogische Tautologie?

Ein Vorschlag zum Nachdenken (ohne Punkte, hierzu sollen Sie nichts abgeben): Man kann diese Herleitung auch für  $\neg\varphi$  durchführen. Wie kommt man dann mithilfe der de Morgan'schen Regeln zur konjunktiven Normalform?

Noch eine Denkanregung (ohne Punkte): Man überlege sich, dass die Umformverfahren in der Regel exponentiell (in  $n$ ) viele einzelne Umformschritte brauchen. Die Analyse aussagenlogischer Formeln kann zwar dem Computer überlassen werden, ist jedoch von der Komplexität her schwer handhabbar.

**2.** (8 Punkte)

Sei  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots)$  die Aussagenlogik mit abzählbar unendlich vielen Satzvariablen. Zwei  $\mathcal{L}$ -Theorien  $T_1, T_2$  heißen äquivalent gdw für alle  $\mathcal{L}$ -Formeln  $\varphi$  gilt:

$$T_1 \models \varphi \text{ gdw } T_2 \models \varphi.$$

- (a) Wieviele  $\mathcal{L}$ -Formeln gibt es?
- (b) Wieviele erfüllbare  $\mathcal{L}$ -Theorien gibt es? Eine  $\mathcal{L}$ -Theorie heißt erfüllbar, wenn es eine Wahrheitsbelegung von  $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$  gibt, so dass für alle  $\varphi \in T$ ,  $\mu(\varphi) = W$ .
- (c) Wieviele paarweise nicht äquivalente  $\mathcal{L}$ -Theorien gibt es?