

Mathematische Logik
Sommersemester 2020
Übungsblatt 6, 16.6.2020

Abgabe spätestens am 23.6.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (4 Punkte) Sei α eine Limesordinalzahl. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent?

- (a) $\forall \beta, \gamma < \alpha (\beta + \gamma < \alpha)$.
- (b) $\forall \beta < \alpha (\beta + \alpha = \alpha)$.
- (c) $\forall X \subseteq \alpha ((X, \in) \cong (\alpha, \in) \vee (\alpha \setminus X, \in) \cong (\alpha, \in))$.
- (d) $\exists \delta (\alpha = \omega^\delta)$ (Ordinale Exponentiation).

2. (6 Punkte)

- (a) Kann man $(\omega_1, <)$ in $(\mathbb{R}, <)$ einbetten? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (b) Bestimmen Sie die Mächtigkeit der Menge $\{f : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ stetige Funktion}\}$ als Mächtigkeit einer bekannten Menge.

3. (6 Punkte) Beweisen Sie ohne Verwendung des Auswahlaxioms den Satz von Schröder-Bernstein. Seien A, B Mengen und seien $f : A \rightarrow B$ und $g : B \rightarrow A$ Injektionen. Dann gibt es eine Bijektion $h : B \rightarrow A$.

Hinweis: Definieren Sie induktiv über $n \in \omega$:

$$A_0 := A \text{ und } B_0 := B$$
$$A_{n+1} := g[B_n] \text{ und } B_{n+1} := f[A_n].$$

Hier schreiben wir für $f : X \rightarrow Y$ und $A \subseteq X$:

$$f[A] := \{f(a) : a \in A\}.$$

$f[A]$ ist also die Bildmenge der Funktion $f \upharpoonright A$. Eine andere übliche Schreibweise ist $f''A$.