

**Mathematische Logik**  
Sommersemester 2020  
Übungsblatt 7, 23.6.2020

Abgabe spätestens am 30.6.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik“ unter dem Punkt „Abgaben“.

1. (4 Punkte) Sei  $X$  eine nicht leere Menge. Ein *Filter über  $X$*  ist eine Teilmenge  $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften:

1.  $\emptyset \notin \mathcal{F}$  and  $X \in \mathcal{F}$
2.  $\forall Y \in \mathcal{F} \forall Z \subseteq X (Y \subseteq Z \rightarrow Z \in \mathcal{F})$
3.  $\forall Y_1, Y_2 \in \mathcal{F} (Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F})$ .

Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  über  $X$  ist ein  $\subseteq$ -maximaler Filter über  $X$ , d.h.

$$\forall Y \subseteq X (Y \notin \mathcal{U} \rightarrow \exists Z \in \mathcal{U} (Z \cap Y = \emptyset)).$$

Kann jeder Filter über  $X$  zu einem Ultrafilter erweitert werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

*Hinweis:* Man darf das Auswahlaxiom benutzen.

2. (2 Punkte) Ist  $\omega^\omega$  abzählbar (ordinale Exponentiation)? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. (4 Punkte) Arbeiten Sie in ZF:

- (a) Sei  $f : X \rightarrow Y$  injektiv. Finden Sie eine Injektion  $i : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ .
- (b) Gibt es eine Injektion von  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$  in  $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ ?
- (c) Gilt  $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ? (Versuchen Sie mit Injektionen in beide Richtungen. Sie dürfen den Satz von Cantor, Schröder und Bernstein ( $a \preceq b \wedge b \preceq a \rightarrow a \sim b$ ) aus einem früheren Aufgabenblatt ohne Beweis benutzen.)

4. (6 Punkte) Sei  $\varphi$  eine beliebige  $L_{Me}$ -Aussage. Zeigen Sie:

- (a)  $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \varphi \urcorner)$  gdw.  $\text{ZFC} \vdash \varphi$ .
- (b)  $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$  gdw.  $\text{ZFC} \vdash \neg \varphi$ .
- (c)  $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \text{Bew}(\ulcorner \neg \varphi \urcorner)$  gdw.  $\text{ZFC} \vdash \varphi \leftrightarrow \neg \text{CON}_{\text{ZFC}}$ .

(*Hinweis:* Benutzen Sie den 2. Gödel'schen Unvollständigkeitssatz für  $\text{ZFC}' := \text{ZFC} \cup \{\neg \varphi\}$ , dessen Gültigkeit angenommen werden darf.)