Abteilung für Mathematische Logik
Heike Mildenberger
Giorgio Laguzzi

Mathematische Logik

Sommersemester 2020

Übungsblatt 8, 30.6.2020

Abgabe spätestens am 7.7.2020 um 12:00 Uhr durch Hochladen einer pdf-Datei auf Ilias im Kurs „Magazin » Lehrveranstaltungen aus HISinOne » Sommersemester 2020 » Mathematisches Institut-VB » Mathematische Logik" unter dem Punkt „Abgaben".

Die *Ackermannfunktion* $A\colon \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ ist definiert durch $A(x,0) = 2 + x$, $A(0,1) = 0$, $A(0,y) = 1$ für $y > 1$ und $A(x+1, y+1) = A(A(x, y+1), y)$.

1. (2 Punkte) Bestimmen Sie die Funktionen $A_n(x) := A(x,n)$, für $n = 0, 1, 2, 3$.

2. (6 Punkte)

   (a) Ist (bei festem n) die Funktion A_n primitiv rekursiv?

   (b) Ist die Ackermannfunktion rekursiv?

3. (3+2 Punkte)

   (a) Zeigen Sie: Für jede primitiv rekursive Funktion $f\colon \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ gibt es ein n, so dass für alle $(x_1, \ldots, x_n) \neq (0, \ldots, 0)$ gilt:

   $$f(x_1, \ldots, x_k) \leq A(\max(x_1, \ldots, x_n), n).$$

   (b) Ist die Ackermannfunktion primitiv rekursiv?

4. (3 Punkte)

   Welche der folgenden Mengen ist primitiv rekursiv? Begründen Sie Ihre Antworten.

   (a) $\{\ulcorner t \urcorner : t \text{ ist ein } L\text{-Term}\}$.

   (b) $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \text{ ist eine } L\text{-Formel}\}$.

   (c) $\{\ulcorner \varphi \urcorner : \varphi \text{ ist eine } L\text{-Aussage}\}$.